



TITLE:

非エルミート密行列を係数とする  
大規模連立一次方程式に対する反  
復解法的高速化とその超大型浮体  
への応用( Dissertation\_全文 )

AUTHOR(S):

巻幡, 憲俊

---

CITATION:

巻幡, 憲俊. 非エルミート密行列を係数とする大規模連立一次方程式に  
対する反復解法的高速化とその超大型浮体への応用. 京都大学, 2005,  
博士(工学)

ISSUE DATE:

2005-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k11538>

RIGHT:

**非エルミート密行列を係数とする  
大規模連立一次方程式に対する反復解法の  
高速化とその超大型浮体への応用**

平成17年3月

巻 幡 憲 俊

**非エルミート密行列を係数とする  
大規模連立一次方程式に対する反復解法の  
高速化とその超大型浮体への応用**

平成17年3月

巻 幡 憲 俊

# 目次

<b>第1章 緒論</b>	<b>1</b>
1.1 研究の背景と目的	1
1.2 研究の概要と構成	3
<b>第2章 波浪回折問題のための境界要素法へのGMRES-IRの適用</b>	<b>6</b>
2.1 はじめに	6
2.2 GMRES-IR	7
2.2.1 Arnoldi法	7
2.2.2 QR分解	8
2.2.3 調和Ritz値	8
2.2.4 QR法	9
2.2.5 IRA	9
2.2.6 GMRES-IR	11
2.2.7 GMRES-IRのアルゴリズム	12
2.3 ベンチマーク計算の結果	16
2.4 第2章のまとめ	19
2.5 第2章の付録	20
<b>第3章 超大型浮体の波浪応答解析へのGMRES-DRの適用</b>	<b>27</b>
3.1 はじめに	27
3.2 GMRES-DR	29
3.2.1 Krylov部分空間	29
3.2.2 Arnoldi法	30
3.2.3 QR分解	30
3.2.4 調和Ritz値および調和Ritzベクトル	31
3.2.5 Krylov部分空間(リスタート)	32
3.2.6 Arnoldi法(リスタート)	34
3.2.7 GMRES-DR	35
3.2.8 GMRES-DRのアルゴリズム	36

3.3	ベンチマーク計算の結果	39
3.4	第3章のまとめ	43
<b>第4章</b>	<b>波浪回折問題のための境界要素法へのILUCの適用</b>	<b>48</b>
4.1	はじめに	48
4.2	前処理について	49
4.2.1	反復改良	49
4.2.2	ILU	49
4.2.3	密行列への適用	50
4.3	ILUTとその問題点	51
4.3.1	LU分解	51
4.3.2	ILUTのアルゴリズム	52
4.3.3	ILUTの問題点	53
4.4	ILUCとその実行	55
4.4.1	ILUCのアルゴリズム	55
4.4.2	$L$ と $U$ の格納について	56
4.4.3	ILUCの詳細	57
4.5	ベンチマーク計算結果	59
4.5.1	8節点2次要素の場合	61
4.5.2	4節点1次要素(分割A)の場合	63
4.5.3	4節点1次要素(分割B)の場合	64
4.5.4	$\tau$ による制御と $p$ による制御について	65
4.6	第4章のまとめ	66
<b>第5章</b>	<b>超大型浮体の波浪回折問題に対するOSP-ILUCの有効性</b>	<b>71</b>
5.1	はじめに	71
5.2	定式化及び解析モデル	73
5.3	前処理について	75
5.4	Operator splitting preconditioners	76
5.5	Crout version of ILU	77
5.6	数値実験結果	79
5.7	第5章のまとめ	82

5.8	第5章の付録 . . . . .	83
<b>第6章</b>	<b>OSP-ILUCの非エルミート密行列への適用性に関する固有値分布からの 検討</b>	<b>90</b>
6.1	はじめに . . . . .	90
6.2	定式化及び解析モデル . . . . .	91
6.3	前処理について . . . . .	92
6.3.1	Operator splitting preconditioners . . . . .	92
6.3.2	Crout version of ILU . . . . .	92
6.4	数値実験結果 . . . . .	93
6.5	第6章のまとめ . . . . .	95
<b>第7章</b>	<b>結論</b>	<b>109</b>
7.1	本研究の成果 . . . . .	109
7.2	今後の研究課題 . . . . .	110

# 図 目 次

2.1	ボンツーン型浮体	22
2.2	GMRES-IR(10.4)の収束特性(実線)	23
2.3	GMRES-IR(20.10)の収束特性(実線)	24
2.4	GMRES-IR(30.6)の収束特性(実線)	25
2.5	GMRES-IR(40.8)の収束特性(実線)	26
3.1	ハイブリッド型浮体	44
3.2	ボンツーン 入射波長=121.21m	45
3.3	ボンツーン 入射波長=88.77m	46
3.4	ハイブリッド 入射波長=121.21m	47
4.1	ボンツーン 入射波長=197.492m	67
4.2	ボンツーン 入射波長=152.328m	68
4.3	ボンツーン 入射波長=105.187m	69
4.4	ボンツーン 入射波長=55.034m	70
5.1	ボンツーン型浮体	85
5.2	ボンツーン底面圧力分布 入射波長=88.770m	86
5.3	ボンツーン底面圧力分布 入射波長=55.034m	87
5.4	OSP-ILUCを適用したときと、前処理を適用しなかったときの収束特性 の比較. $\lambda = 88.770\text{m}$ , $N = 33441$ , $r = 40\text{m}$ .	88
5.5	OSP-ILUCを適用したときと、前処理を適用しなかったときの収束特性 の比較. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 33441$ , $r = 40\text{m}$ .	89
6.1	ボンツーン型浮体	96
6.2	OSP-ILUCを適用したときと、前処理を適用しなかったときの収束特性 の比較. $\lambda = 88.770\text{m}$ , $N = 33441$ , $r = 40\text{m}$ .	97
6.3	前処理を適用しなかったときのスペクトル. $\lambda = 88.770\text{m}$ , $N = 33441$ , $r =$ $0\text{m}$ .	98
6.4	OSP-ILUCを適用したときのスペクトル. $\lambda = 88.770\text{m}$ , $N = 33441$ , $r = 20\text{m}$ .	99

6.5	OSP-ILUCを適用したときのスペクトル. $\lambda = 88.770\text{m}$ , $N = 33441$ , $r = 40\text{m}$ .	100
6.6	OSP-ILUCを適用したときのスペクトル. $\lambda = 88.770\text{m}$ , $N = 33441$ , $r = 60\text{m}$ .	101
6.7	OSP-ILUCを適用したときのスペクトル. $\lambda = 88.770\text{m}$ , $N = 33441$ , $r = 80\text{m}$ .	102
6.8	OSP-ILUCを適用したときと, 前処理を適用しなかったときの収束特性 の比較. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 33441$ , $r = 40\text{m}$ .	103
6.9	前処理を適用しなかったときのスペクトル. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 33441$ , $r =$ $0\text{m}$ .	104
6.10	OSP-ILUCを適用したときのスペクトル. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 33441$ , $r = 20\text{m}$ .	105
6.11	OSP-ILUCを適用したときのスペクトル. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 33441$ , $r = 40\text{m}$ .	106
6.12	OSP-ILUCを適用したときのスペクトル. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 33441$ , $r = 60\text{m}$ .	107
6.13	OSP-ILUCを適用したときののスペクトル. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 33441$ , $r =$ $80\text{m}$ .	108



# 表 目 次

2.1	GMRES-IRの収束回数	16
2.2	GMRESとORTHOMINとGMRES-IRの収束回数	17
2.3	GMRESとORTHOMINとGMRES-IRの収束までの計算時間(秒)	18
2.4	GMRES-IR(20, $K$ )の収束回数	18
3.1	主要諸元	39
3.2	ポンツーン 入射波長=121.21m	41
3.3	ポンツーン 入射波長=88.77m	41
3.4	ハイブリッド 入射波長=121.21m	42
3.5	GMRES-DR, GMRES, full-GMRES及びGPBi-CGの収束回数	42
3.6	GMRES-DR, GMRES, full-GMRES及びGPBi-CGの収束までの計算時間(秒)	43
4.1	主要諸元	59
4.2	$\tau$ を変化させたときのILUCとILUTの計算結果. $\lambda = 197.492\text{m}$ , $N = 25921$ .	61
4.3	$\tau$ を変化させたときのILUCとILUTの計算結果. $\lambda = 152.328\text{m}$ , $N = 25921$ .	62
4.4	$\tau$ を変化させたときのILUCとILUTの計算結果. $\lambda = 105.187\text{m}$ , $N = 25921$ .	62
4.5	$\tau$ を変化させたときのILUCとILUTの計算結果. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 25921$ .	63
4.6	ILUCの計算結果. $\lambda = 197.492\text{m}$ , $N = 33441$	64
4.7	ILUCの計算結果. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 33441$	64
4.8	ILUCの計算結果. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 51801$	65
5.1	$r$ を変化させたときのOSP-ILUCの計算結果. $\lambda = 88.770\text{m}$ , $N = 33441$ .	79
5.2	$r$ を変化させたときのOSP-ILUCの計算結果. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 33441$ .	80
5.3	$\tau$ を変化させたときのILUCの計算結果. $\lambda = 197.492\text{m}$ , $N = 33441$ .	80
5.4	$\tau$ を変化させたときのILUCの計算結果. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 33441$ .	81
6.1	$r$ を変化させたときのOSP-ILUCの計算結果. $\lambda = 88.770\text{m}$ , $N = 33441$ .	93
6.2	$r$ を変化させたときのOSP-ILUCの計算結果. $\lambda = 55.034\text{m}$ , $N = 33441$ .	93

# 第1章 緒論

## 1.1 研究の背景と目的

超大型(長さ数km規模)の鋼製の箱形浮体を海上に浮かべ、海上空港等の人工基盤として利用しようとする構想が、いよいよ実用化段階に入りつつある。その設計においては波浪応答解析が必須となる。特に、複雑な地形による波浪変形の影響や地形-浮体相互影響を正確に評価する必要性が高い。このような任意形状に対応した厳密な大規模モデルの計算には、流体に対しては境界要素法(BEM)<sup>45)</sup>が、構造物に対しては有限要素法(FEM)<sup>45)</sup>が適しており、流体と構造物の境界における速度の法線成分の連続性により、両手法の結合が実現できる<sup>49)</sup>。この場合、100万元規模の非Hermiteかつ複素密行列を係数とする連立一次方程式を解く必要がある。

非圧縮性の渦なし完全流体は、ポテンシャル流であり、その速度ポテンシャルはLaplace方程式を満たす。水波の振幅が極めて小さい場合を考えると、自由表面における境界条件は近似的に線形化することができる<sup>46)</sup>。しかし、地形が複雑になるとLaplace方程式の解をBessel関数を用いて解析的に表現する<sup>7)</sup>ことは不可能になる。計算機を用いて数値的手法でLaplace方程式の解を求めることになる。外部領域が非有界である場合、Laplace方程式の解として興味があるのは、Sommerfeldの放射条件<sup>1)</sup>を満たすものである。そのため、流体に対してBEMを、構造物に対してFEMを用いて計算する方が近似がよいとされている<sup>1)</sup>。また、BEMを用いた場合、境界上の値のみが未知量となるため、未知数の数は大幅に減少する。境界値問題は積分方程式を解くことに帰着されるが、自由表面があるため積分作用素は入射波長に依存する。通常の設定では積分作用素が逆作用素を持たない周波数が存在し、その周波数において解が得られないことが起こる<sup>54)</sup>。ここでは、高周波数領域は扱わないため、通常の設定を用いる。また、この積分作用素は自己共役ではないため、離散化により得られた行列は非Hermiteとなる。

連立一次方程式の解法として、直接法(Gaussの消去法<sup>35)</sup>)がよく知られているが、このような大規模行列に対しては記憶容量および計算時間の問題からその適用が不可能であり、反復法が用いられる。反復法とは、繰り返しの各ステップにおいて連立一次方程式に対するより正確な解を得るために逐次的な近似値を使う広範囲な

テクニックのことをいう。反復法としては、大規模かつ正定値Hermite行列に対する the conjugate gradient method (CG)<sup>11, 9)</sup>がよく知られているが、ここでは係数行列が非Hermiteであるため、CGを用いることはできない。大規模かつ非Hermite行列に対する反復法として、the conjugate gradient method applied to the normal equation (CGNR)<sup>11)</sup>, the generalized minimal residual method (GMRES)<sup>41, 52, 53)</sup>そしてthe conjugate gradient squared method (CGS)<sup>43)</sup>がよく知られている。これらの反復法は基本的の異なっており、それらの収束率は問題のクラスに依存する<sup>36)</sup>。そのため、与えられた問題に対して最適な解法を選択することは難しい。ここでは理論的にも比較的十分に調べられているGMRESを考察する。

積分作用素のスペクトルは、入射波長を短くしていくとともに、広がっていく傾向にある<sup>28)</sup>。また、反復法の収束率は係数行列のスペクトルに強く依存しており<sup>36, 19)</sup>、そのスペクトルが広がっている場合、収束は悪化する。したがって、与えられた連立一次方程式を、元の連立一次方程式と同じ解を持ち、かつそのスペクトルが1の近くに集まっているような連立一次方程式に変換しようと試みる方法が多く提案されている。そのような変換は前処理と呼ばれている。良い前処理の使用は反復法の収束性を改良し、前処理を構築したり適用するのに必要な余分のコストを十分に回収できる。前処理行列の大きなクラスは係数行列の不完全分解<sup>29, 30, 51)</sup>に基づいている。分解過程であるフィル要素、すなわち厳密な分解ではゼロ要素でなくなるゼロ要素の位置が無視されるなら、不完全分解と呼ぶ。

超大型浮体の波浪応答解析においては、その計算時間の大半が連立一次方程式を解くことに費やされている。線形計算の果たす役割は大きいものと思われる。

## 1.2 研究の概要と構成

本研究は、非Hermite密行列を係数とする大規模連立一次方程式に対する反復解法  
の高速化とその超大型浮体への応用を目的としている。

ここでは、偏微分方程式系に対する数値解法として境界要素法(BEM)を用いてい  
る。そのため、連立一次方程式の係数行列は大規模密行列となる。大規模密行列を係  
数とする連立一次方程式に対する研究は、有限要素法(FEM)に対する大規模疎行列  
の研究と比較して、あまり知られていない。

本論文の構成は次の通りである。

第2章<sup>20)</sup>は反復法の超大型浮体への応用に関する研究である。非Hermite行列に対  
する反復法として、the generalized minimal residual method (GMRES)<sup>41, 52, 53)</sup>がよく知ら  
れている。しかし、GMRESは1反復あたりに必要な記憶容量と計算量が反復回数に比  
例して増加する問題があるため、実際には1反復ごとに増加する記憶容量と計算量  
を制限したリスタート版GMRESが用いられる。そのため、構成された近似解列が停  
滞して解に収束しないことがある。本章では、構成された近似解列の停滞を妨げよ  
うと試みることを目的として、生成されたKrylov部分空間を、いくつかの近似固有ベ  
クトル群が張る部分空間に圧縮するthe implicitly restarted GMRES (GMRES-IR)<sup>32, 16)</sup>  
を超大型浮体に応用した。しかし、リスタートパラメーターを40より大きく選ぶと数  
値的に不安定になる現象を確認したため、実際のところ、リスタート版GMRESより  
も有効であるとは言えず、今後の課題とした。

第3章<sup>21, 26)</sup>は反復法の超大型浮体への応用に関する研究である。第2章において、  
GMRES-IR<sup>32, 16)</sup>を超大型浮体に応用したとき、リスタートパラメーターを40より大  
きく選ぶと数値的に不安定になる現象を確認した。その原因は近似固有ベクトル  
の計算にthe implicitly restarted Arnoldi (IRA)<sup>44, 17)</sup>を用いていたためであった。本章で  
は、GMRES-IRの数値的不安定性の解消を目的として、近似固有ベクトルの計算を  
QR法により実行するthe GMRES with deflated restarting (GMRES-DR)<sup>33)</sup>を超大型浮体  
に應用した。丸め誤差を無視した場合、GMRES-DRによって構成される近似解列は  
GMRES-IRによるものと全く同じものである。リスタートパラメーターを500に選ん

でも、数値的に不安定にならないことを確認することにより、GMRES-IRの超大型浮体への応用による数値的不安定性の問題を肯定的に解決した。

第4章<sup>22)</sup>は反復法に対する前処理の超大型浮体への応用に関する研究である。大規模疎行列に対する前処理として、係数行列の不完全分解に基づくthe dual threshold incomplete LU factorization (ILUT)<sup>40)</sup>がよく知られている。しかし、問題が非Hermiteであるため、ILUTは構成する上半三角成分と下半三角成分をバランスよく近似せず、また問題が密行列であるため、ILUTの超大型浮体への応用は困難であることが分かった。本章では、前処理の密行列への適用を目的として、上半三角成分と下半三角成分をバランスよく近似する、大規模疎行列に対するthe Crout version of the incomplete LU factorization (ILUC)<sup>18)</sup>を超大型浮体に応用した。ILUCは、前処理成分の絶対値の最小値を制御するパラメータの減少とともに収束回数もほぼ単調に減少することを確認したが、係数行列が密行列であるため、最適となるパラメータの値を設定することは困難である。また、反復法における行列-ベクトル積は、the fast multipole method (FMM)<sup>10, 50)</sup>を用いて近似され、遠方点に対応する行列成分は計算されない。ILUCは前処理行列の作成に係数行列の全成分を必要とするため、FMMを用いたとき、前処理行列作成に要する時間もあわせた全計算時間に関しては、これを大きく還元することができなかった。

第5章<sup>23, 24, 25, 26)</sup>は反復法に対する前処理の超大型浮体への応用に関する研究である。第4章において、ILUC<sup>18)</sup>を超大型浮体に応用したとき、前処理成分の絶対値の最小値を制御するパラメータの最適値を設定することが困難であった。また、FMM<sup>10, 50)</sup>を用いたとき、前処理行列作成に要する時間もあわせた全計算時間に関しては、これを大きく還元することができなかった。本章では、前処理としてさらにthe operator splitting preconditioner (OSP)<sup>6, 42)</sup>を組み合わせることにより、上記の2つの問題を肯定的に解決している。OSPにより、係数行列は近傍点からなる疎行列と遠方点からなる密行列に分解され、近傍点からなる疎行列からILUCにより前処理行列が構成される。OSP-ILUCによる前処理は、遠方点からなる密行列を必要としない。

第6章<sup>27)</sup>はOSP-ILUCの適用による固有値分布からの検討である。第5章において、OSP-ILUCのパラメータ $r$ を増加させると、GMRESの収束回数が増加する現象を確認

した. その原因を調べるため, OSP-ILUCの適用による係数行列のスペクトル(固有値分布)の計算を行った. 本解析例に対して, 入射波長を短くしていくと, 係数行列のスペクトルが広がっていくことを数値実験により確認した. さらに, OSP-ILUCの適用したとき, パラメータ $r$ を増加させると, 係数行列のスペクトルが集まっていくことも確認した. また,  $r$ が80mのとき, 係数行列のスペクトルが集まっているにもかかわらず, 収束回数が増加している現象を確認した. その原因として, 係数行列のスペクトルが原点の近くに集まったためであると考えられる.

## 第2章 波浪回折問題のための境界要素法への GMRES-IRの適用

### 2.1 はじめに

超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題の解析において、外部領域が非有界で境界条件が単純でないことから、流体に対しては境界要素法(BEM)が、構造物に対しては有限要素法(FEM)が適しており、流体と構造物の境界における速度の法線成分の連続性により両手法が結合される<sup>1, 49)</sup>。最終的には、非Hermiteかつ密行列を係数とする大規模連立一次方程式

$$Ax = b \quad (2.1)$$

を解くことに帰着する。

問題の規模が大きくなると、直接法により連立一次方程式を解くのは困難となり反復法が用いられる。大規模かつ非Hermite行列に対する反復法として、the generalized minimal residual method (GMRES)<sup>41, 52, 53)</sup>がよく知られている。しかし、GMRESは収束に到るまでの反復回数が増加するに従って計算量および記憶容量をたくさん必要とするため、実際にはリスタート版GMRES( $M$ )<sup>41, 52, 53)</sup>が用いられ、収束が悪化する。

記憶容量をGMRES( $M$ )と同程度に抑えつつ、収束性の向上を目指したものとして、the implicitly restarted GMRES (GMRES-IR)<sup>32, 16)</sup>が開発されている。GMRES( $M$ )では、その残差の最小性を実現するKrylov部分空間<sup>39)</sup>はリスタートをするときにすべて捨てられていた。一方、GMRES-IRでは構成された部分空間を、リスタート時に近似固有ベクトル群が張る部分空間に圧縮して新しく生成される探索空間に含ませる。近似固有ベクトル群が張る部分空間への圧縮は、GMRES( $M$ )と比較して、より多くの情報を残すことができ、従って収束性の改善が期待できる。

本章では、GMRES-IRを超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題の解析に実際に適用し、そのベンチマーク計算の結果から本手法の有効性について検討する。

## 2.2 GMRES-IR

連立一次方程式を反復法により解く方法の一つとしてGMRES-IR<sup>32, 16)</sup>が知られている。GMRES-IRはリスタート時に、構成されたKrylov部分空間<sup>39)</sup>を絶対値の小さい固有値に対応する固有ベクトルを近似する調和Ritzベクトル群<sup>32, 34, 16)</sup>が張る部分空間に圧縮し、新しく生成される探索空間に含ませる。調和Ritz値<sup>32, 34, 16)</sup>は絶対値の小さい固有値を表す傾向にあるため、GMRES-IRが構成していく探索空間は絶対値の小さい固有値群に対応する固有ベクトル群が張る  $A$ -不変部分空間<sup>13)</sup>に近づいていく傾向にある。構成されたKrylov部分空間は絶対値の大きい固有値群に対応する  $A$ -不変部分空間を近似する傾向にある<sup>39)</sup>ため、計算された調和Ritz値群のうち絶対値の小さいものに対応する調和Ritzベクトル群を保存することにより、生成される探索空間は停滞しにくくなる。また、探索空間が  $A$ -不変部分空間を含めば停止する。

調和Ritzベクトル群は陰的に構成されるため、そのベクトル群を保存するための新たな記憶領域を用意する必要がない。一方、GMRES-IRが構成していく探索空間は、GMRESが構成していく探索空間の部分空間になるので、GMRESより速く収束することはない。なお、以下で扱う行列およびベクトルは全て複素数を成分とするものとする。

ここでは、GMRES-IRを構成している方法を7つの小節に分けて記述する。第2.2.1小節ではArnoldi法を記述する。第2.2.2小節ではQR分解を記述する。第2.2.3小節では調和Ritz値の定義を与える。第2.2.4小節では調和Ritz値を計算する方法としてQR法を用いる。第2.2.5小節では調和Ritzベクトル群が張る部分空間がIRAにより得られることを記述する。第2.2.6小節において、the implicitly restarted Arnoldi (IRA)<sup>44, 17)</sup>により得られた部分空間を使ってリスタートできることを記述する。最後の第2.2.7小節ではGMRES-IRの具体的なアルゴリズムを与える。

### 2.2.1 Arnoldi法

行列  $A$  を固有値問題における中間形である Hessenberg 形<sup>35)</sup>に変換する方法として Arnoldi 法<sup>39, 35, 44, 17)</sup>が知られている。Arnoldi 法はまた連立一次方程式の解法である GMRES にも用いられる。

#### Arnoldi法



初期ベクトル  $v_1$  ( $\|v_1\|_2 = 1$ ) をとる;

for  $k = 1, \dots, M$  do

begin

$$h_{ik} = (Av_k, v_i) \quad (i = 1, \dots, k);$$

$$v_{k+1} = Av_k - \sum_{i=1}^k v_i h_{ik};$$

$$h_{k+1,k} = \|v_{k+1}\|_2;$$

$$v_{k+1} = v_{k+1}/h_{k+1,k}$$

end

$H_M$  を Arnoldi 法により得られた  $M \times M$  の Hessenberg 行列とする.  $\bar{H}_M$  を Arnoldi 法により得られた  $(M+1) \times M$  の行列とする.  $V_M$  を  $v_1$  から  $v_M$  を並べた  $N \times M$  の行列とする. また  $e_M$  は第  $M$  成分のみが 1 である単位ベクトルである. このとき次の関係が成立する.

$$AV_M = V_M H_M + h_{M+1,M} v_{M+1} e_M^H \quad (2.2)$$

$$= V_{M+1} \bar{H}_M. \quad (2.3)$$

ここでは、ノルムが 1 である  $N$  次元ベクトル  $v_1$  から  $(M+1) \times M$  行列  $\bar{H}_M$  と  $N \times (M+1)$  行列  $V_{M+1}$  を求めるために Arnoldi 法を用いる.

## 2.2.2 QR 分解

最小 2 乗問題<sup>35)</sup>の解法に、また固有値計算法の一つである QR 法に QR 分解<sup>35)</sup>は用いられる.  $M \times M$  行列  $H$ , または  $(M+1) \times M$  行列  $\bar{H}$  を QR 分解する方法には、修正 Gram-Schmidt 法<sup>35)</sup>, Householder 変換による方法<sup>35)</sup>そして Givens 変換による方法<sup>35)</sup>があるが、ここでは Householder 変換による方法で求める.

## 2.2.3 調和 Ritz 値

調和 Ritz 値<sup>32, 34, 16)</sup>は大規模な行列  $A$  の絶対値の小さい固有値を近似する値である. 調和 Ritz 値  $\tilde{\theta}_i$  と  $\tilde{g}_i \neq 0$  は次式で定義され、 $\tilde{\theta}_i$  は  $A^{-1}$  の  $Av_1, \dots, Av_M$  が張る部分空間に関する固有値の逆数になっている.

$$(AV_M)^H A^{-1} (AV_M) \tilde{g}_i = \frac{1}{\tilde{\theta}_i} (AV_M)^H (AV_M) \tilde{g}_i. \quad (2.4)$$

また, 上の式は次の形に変形できる.

$$(H_M + |h_{M+1,M}|^2 H_M^{-H} e_M e_M^H) \tilde{g}_i = \tilde{\theta}_i \tilde{g}_i. \quad (2.5)$$

$G = H_M + |h_{M+1,M}|^2 H_M^{-H} e_M e_M^H$  は Hessenberg 行列であるので次小節の QR 法によりその固有値が計算される. 調和 Ritz ベクトル  $\tilde{y}_i$  は次で定義される:

$$\tilde{y}_i = V_M \tilde{g}_i. \quad (2.6)$$

Ritz 値<sup>32, 44)</sup>は  $A$  の  $v_1, \dots, v_M$  が張る部分空間に関する固有値, すなわち  $H_M$  の固有値で  $A$  の絶対値の大きい固有値を表す傾向にある<sup>39)</sup>ので, 調和 Ritz 値は  $A$  の絶対値の小さい固有値を表す傾向にある.

## 2.2.4 QR 法

QR 法は小規模な問題に対して固有値を数値的に求める方法である. Hessenberg 行列  $G$  の固有値の絶対値が全て異なっていれば, QR 法により  $G$  は上三角行列に収束し, その収束速度は  $G$  の固有値の比で決まっている. ここでは, QR 法の収束を加速したシフト付き QR 法<sup>35)</sup>により調和 Ritz 値を求める.

$G$  は Hessenberg 行列であるので, その固有値を IMSL<sup>12)</sup>の EVLCH/DEVLCH により計算した.

## 2.2.5 IRA

The implicitly restarted Arnoldi (IRA)<sup>44, 17)</sup>は大規模な問題に対して行列  $A$  の固有値の一部を反復的に求める方法である. この方法はリスタート時に, 構成された近似固有空間を初期探索空間とすることにより, 近似固有値の残差を減らすことを可能にする. IRA は Ritz 値をシフトに用いることにより  $A$  の絶対値の大きい固有値を, 調和 Ritz 値をシフトに用いることにより絶対値の小さい固有値を求めることができる. Ritz 値は  $A$  の絶対値の大きい固有値を, 調和 Ritz 値は  $A$  の絶対値の小さい固有値を近似する傾向がある<sup>39)</sup>.

## IRA

探索空間の最大の次元  $M$ , リスタート時に保存するベクトルの数  $K$  を選ぶ;

$$P = M - K;$$

Hessenberg 行列  $H_M$  を渡す;

シフト  $\mu_1, \dots, \mu_P$  を選ぶ;

$$Q = I_M;$$

for  $k = 1, \dots, P$  do

begin

$H_M - \mu_k I_M = Q^{(k)} R^{(k)}$  と QR 分解する;

$$H_M = \mu_k I_M + R^{(k)} Q^{(k)};$$

$$Q = Q Q^{(k)}$$

end

$$v_{K+1} = v_{M+1} h_{M+1,M} e_M^H Q e_K + V_M Q e_{K+1} h_{K+1,K};$$

$$V_K = V_M Q(e_1, \dots, e_K);$$

$$h_{K+1,K} = \|v_{K+1}\|_2;$$

$$v_{K+1} = v_{K+1}/h_{K+1,K}$$

このとき、更新された  $V_{K+1}$  と  $\bar{H}_K$  の間には  $AV_K = V_{K+1} \bar{H}_K$  の関係がある。また  $H_K$  が Hessenberg 形となるように  $v_{K+1}$  を定めているので、Arnoldi 法を  $K + 1$  回目から始めることが可能である。

また、シフト  $\mu_1, \dots, \mu_P$  を調和 Ritz 値群  $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_P$  に選ぶと、更新された  $v_1, \dots, v_K$  が張る部分空間は残りの調和 Ritz 値群  $\tilde{\theta}_{P+1}, \dots, \tilde{\theta}_M$  に対応する調和 Ritz ベクトル群が張る部分空間に等しくなる<sup>44, 32, 16)</sup>。

ここでは、 $M \times M$  の Hessenberg 行列  $H_M$  として Ritz 値を固有値とする行列  $H_M$  を渡し、シフト  $\mu_1, \dots, \mu_P$  として  $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_M$  のなかで絶対値が大きい  $P$  個をシフトに選ぶことにより、 $V_{K+1}$  と  $\bar{H}_K$  を IRA により更新する。このとき、絶対値の小さい調和 Ritz 値群に対応する調和 Ritz ベクトル群が張る部分空間は  $v_1, \dots, v_K$  が張る部分空間に等しい。その詳細を第2章の付録に示す。

## 2.2.6 GMRES-IR

以上で準備が終わり, GMRES-IR<sup>32, 16)</sup>のアルゴリズムとその記憶容量に関する記述に入る. GMRES-IRは, リスタート版GMRES( $M$ )に調和Ritz値群の情報を組み込んだものである. はじめにGMRESを $M$ 回実行し, その次に調和Ritz値群をQR法を用いて計算する. 計算した調和Ritz値群の絶対値が大きい $P$ 個をシフトに選び, IRAにより絶対値の小さい調和Ritz値群に対応する調和Ritzベクトル群が張る $K$ 次元の部分空間を求める. この部分空間を次に生成する探索空間に含ませてリスタートする. ここで $R_M$ は $\bar{R}_M$ の第 $M+1$ 行を除いた行列,  $f$ は $\bar{f}$ の第 $M+1$ 成分を除いたベクトルである.

### GMRES-IR

1. 探索空間の最大の次元 $M$ , 保存する調和Ritzベクトルの数 $K$ を選ぶ;

$$P = M - K;$$

初期ベクトル $x_0$ を取る;

$$r_0 = b - Ax_0;$$

$$v_1 = r_0 / \|r_0\|_2;$$

$$\bar{f} = \|r_0\|_2 e_1;$$

2. Arnoldi法により $V_{M+1}$ と $\bar{H}_M$ を求める;

$$\bar{H}_M = \bar{Q}_M \bar{R}_M \text{ と QR 分解する: } \bar{f} = \bar{Q}_M^H \bar{f};$$

3.  $x_M = x_0 + V_M R_M^{-1} f$ ;

$$\bar{f} = \bar{Q}_M e_{M+1} e_{M+1}^H \bar{f}; r_M = V_{M+1} \bar{f};$$

$$r_M = b - Ax_M;$$

$$G = H_M + |h_{M+1,M}|^2 H_M^{-H} e_M e_M^H;$$

4. QR法により $G$ の固有値である調和Ritz値 $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_M$ を求める;

$\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_M$ を並び替えて,  $|\tilde{\theta}_1| \geq \dots \geq |\tilde{\theta}_M|$ となるようにする;

5. シフトを $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_P$ として, IRAにより $V_{K+1}$ と $\bar{H}_K$ を更新する;

$$\bar{f} = V_{K+1}^H r_M;$$

Arnoldi法の $K+1$ 回目へ進む

IRAから得られるユニタリ行列 $Q$ は, その $(i, j)$ 成分が $i > P + j$ のとき0であることに注意して,  $v_1, \dots, v_{K+1}$ を $F(\text{restart}, i) = i - 1 + \text{restart} \times P \pmod{(M+1)}$ という関数を用いて,  $u_{F(\text{restart}, i)} = v_i$ というように, リスタートごとに $P$ つつ右にずらして更新する.

$H_M$ が逆行列を持たないときは本方法はブレイクダウンすることになるが、その際は通常のGMRES( $M$ )でリスタートすることになる。

$r_M$ は更新された $v_1, \dots, v_{K+1}$ たちが張る部分空間に属しており、 $r_M = V_{K+1}\bar{f}$ と表わされるため、リスタートが可能となる。

更新された $v_1, \dots, v_{K+1}$ たちが張る部分空間はまたKrylov部分空間であり<sup>32)</sup>、リスタートをしないGMRESが生成する探索空間の部分空間である。このため、GMRES-IRはGMRESより速く収束することはない。 $K$ を0にとれば、GMRES-IR( $M, 0$ )は通常のGMRES( $M$ )である。記憶容量は通常のGMRES( $M$ )と比べて $M^2 + M$ だけ増加するが、 $F$ という関数を用いたためベクトル群を保存するためのこれ以上の記憶領域を用意する必要はない。また探索空間の中で最小条件を満足しているので、残差が振動することではなく、反復回数の増加に対して単調に減少する。

## 2.2.7 GMRES-IRのアルゴリズム

ここでは、GMRES-IRのアルゴリズムを前小節より詳細に与える。GMRES-IR、GMRES( $kk, mm$ )、 $F(\text{rest}, i)$ の3つのアルゴリズムを掲載している。行列 $Q$ はHouseholder変換 $H(w_k)$ の積であるから、 $M$ 次元ベクトルである $\alpha$ と $\beta$ に記憶されている。すなわち、 $H(w_k) = I_M - \frac{2}{\|w_k\|_2} w_k w_k^H$ 、 $w_k = \alpha_k e_k + \beta_k e_{k+1}$ である。 $U_{F(\text{rest}, *), M}$ は $u_{F(\text{rest}, 1)}, \dots, u_{F(\text{rest}, M)}$ を並べた行列である。 $\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k, \bar{\rho}$ はそれぞれ $\alpha_k, \beta_k, \rho$ の共役複素数である。tolは1よりも小さく、マシンイプシロンよりも大きい実数である。

また、GMRES( $kk, mm$ )は $kk + 1$ 回目から $mm$ 回目までのGMRESであり、リスタートの時に $K + 1$ 回目のGMRES法から始めるためGMRES-IRから分離させている。 $\rho$ は $H_M = QR$ とQR分解したときの $R$ の第 $(M, M)$ 成分であり、 $H_M^{-H} e_M = \frac{1}{\rho} Q e_M$ となる。 $F(\text{rest}, i)$ はリスタート時に更新された $v_1, \dots, v_{K+1}$ の保存に用いられる。更新された $\bar{f}$ は第1成分から第 $K$ 成分まで0であるので0を代入した。

### GMRES-IR

1.  $M, K$ を選ぶ;  $P = M - K$  とおく;  
iter=0; rest=0;  
初期ベクトル $x$ を取る:  $r = b - Ax$ ;  
 $u_{F(\text{rest}, 1)} = r / \|r\|_2$ ;  $f_1 = \|r\|_2$ ;
2. GMRES( $U, \bar{H}, \alpha, \beta, \bar{G}, \rho, \bar{f}, 0, K, \text{iter}, \text{rest}$ )を呼ぶ;

GMRES( $U, \overline{H}, \alpha, \beta, \overline{G}, \rho, \bar{f}, K, M, \text{iter}, \text{rest}$ ) を呼ぶ;

3. rest=rest+1;

$$x = x + U_{F(\text{rest}-1, *), M} G_M^{-1} f;$$

for  $i = M, \dots, 1$  do

begin

$$w = \frac{2}{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2} \bar{\beta}_i f_{i+1};$$

$$f_i = -\alpha_i w; f_{i+1} = f_{i+1} - \beta_i w$$

end

$$r = U_{F(\text{rest}-1, *), M+1} \bar{f};$$

$$r = b - Ax;$$

for  $j = 1, \dots, M-1$  do

begin

for  $i = 1, \dots, j+1$  do

begin

$$g_{ij} = h_{ij}$$

end

end

$$g_{MM} = \frac{|h_{M+1, M}|^2}{\bar{\rho}};$$

for  $i = M-1, \dots, 1$  do

begin

$$w = \frac{2}{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2} \bar{\beta}_i g_{i+1, M};$$

$$g_{iM} = -\alpha_i w; g_{i+1, M} = g_{i+1, M} - \beta_i w$$

end

for  $i = 1, \dots, M$  do

begin

$$g_{iM} = h_{iM} + g_{iM}$$

end

4. QR法により  $G$  の固有値  $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_M$  を求める;

$\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_M$  を並び替えて,  $|\tilde{\theta}_1| \geq \dots \geq |\tilde{\theta}_M|$  となるようにする;

5.  $G = I_M$ ;

for  $k = 1, \dots, P$  do

```

begin
   $H_M - \tilde{\theta}_k I_M = Q^{(k)} H_M$  と QR 分解する;
   $H_M = \tilde{\theta}_k I_M + H_M Q^{(k)}$ ;
   $G = G Q^{(k)}$ 
end

 $u_{F(\text{rest}, K+1)} = u_{F(\text{rest}-1, M+1)} h_{M+1, M} e_M^H G e_K + U_{F(\text{rest}-1, *), M} G e_{K+1} h_{K+1, K}$ ;
for  $k = K, \dots, 1$  do
  begin
     $u_{F(\text{rest}, k)} = u_{F(\text{rest}-1, P+k)} e_{P+k}^H G e_k + U_{F(\text{rest}-1, *), (P+k-1)} G e_k$ 
  end

   $h_{K+1, K} = \|u_{F(\text{rest}, K+1)}\|_2$ ;
   $u_{F(\text{rest}, K+1)} = u_{F(\text{rest}, K+1)} / h_{K+1, K}$ ;
   $\bar{f} = U_{F(\text{rest}, *), K+1}^H r$ ;
   $\overline{H}_K = \overline{Q}_K \overline{G}_K$  と QR 分解する;
   $\bar{f} = \overline{Q}_K^H \bar{f}$ ;
  for  $i = 1, \dots, K$  do
    begin
       $f_i = 0$ 
    end
  end
  GMRES( $K, M$ )へ進む

  GMRES( $U, \overline{H}, \alpha, \beta, \overline{G}, \rho, \bar{f}, kk, mm, \text{iter}, \text{rest}$ )
  for  $k = kk + 1, \dots, mm$  do
    begin
      iter=iter+1;
       $u_{F(\text{rest}, k+1)} = A u_{F(\text{rest}, k)}$ ;
      for  $i = 1, \dots, k$ 
        begin
           $h_{ik} = (A v_k, v_i)$ ;
           $u_{F(\text{rest}, k+1)} = u_{F(\text{rest}, k+1)} - u_{F(\text{rest}, i)} h_{ik}$ 
        end
      end
    end
  end

```

```

 $h_{k+1,k} = \|u_{F(\text{rest},k+1)}\|_2;$ 
 $u_{F(\text{rest},k+1)} = u_{F(\text{rest},k+1)}/h_{k+1,k};$ 
 $g_{1k} = h_{1k};$ 
for  $i = 1, \dots, k-1$  do
    begin
         $w = \frac{2}{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2} (\bar{\alpha}_i g_{ik} + \bar{\beta}_i h_{i+1,k});$ 
         $g_{ik} = g_{ik} - \alpha_i w; g_{i+1,k} = h_{i+1,k} - \beta_i w$ 
    end
if  $g_{kk} \neq 0$  then
     $\alpha_k = -\frac{g_{kk}}{|g_{kk}|} \frac{|h_{k+1,k}|^2}{|g_{kk}| + (|g_{kk}|^2 + |h_{k+1,k}|^2)^{\frac{1}{2}}};$ 
     $\beta_k = h_{k+1,k};$ 
    if  $(k = M)$   $\rho = g_{kk};$ 
     $g_{kk} = \frac{g_{kk}}{|g_{kk}|} (|g_{kk}|^2 + |h_{k+1,k}|^2)^{\frac{1}{2}}; g_{k+1,k} = 0$ 
else
     $\alpha_k = -|h_{k+1,k}|; \beta_k = h_{k+1,k};$ 
    if  $(k = M)$  通常の GMRES( $M$ ) でリスタート;
     $g_{kk} = |h_{k+1,k}|; g_{k+1,k} = 0$ 
end if
 $w = \frac{2}{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2} \bar{\alpha}_k f_k;$ 
 $f_k = f_k - \alpha_k w; f_{k+1} = -\beta_k w;$ 
if  $|f_{k+1}| \leq \text{tol} \|b\|_2$  then
     $x = x + U_{F(\text{rest},*),k} G_k^{-1} f$ 
    return
end if
end

F(rest,  $i$ )
 $F = i - 1 + \text{rest} \times P \pmod{(M+1)}$ 

```



## 2.3 ベンチマーク計算の結果

ここでは超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題の解析<sup>50, 48)</sup>に GMRES-IR を適用した結果を表す.

解析モデルは、図-2.1 に表される、喫水  $d$ 、長さ  $L$ 、幅  $B$  の箱形ポンツーン浮体とし、一定水深  $h$  とする. 自由水面上に  $xy$  平面をとり、 $z$  軸は浮体中心を通るように定義する. 非圧縮性の渦なし完全流体はポテンシャル流であり、その速度ポテンシャル  $\phi$  は Laplace 方程式を満たす. 水波の振幅が極めて小さい場合を考えると、自由表面における境界条件は近似的に線形化することができる. 水波 Green 関数と呼ばれる、自由水面、水底面および無限遠境界条件を満たす、Laplace 作用素  $\nabla^2$  の基本解  $G(x, \xi)$  を用いると、速度ポテンシャル  $\phi$  に関する次の積分方程式が得られる.

$$4\pi\phi(x) + \int_{S_H} \left\{ \phi(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} - \phi(x) \frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial n_\xi} \right\} d\xi = 4\pi\phi_I(x). \quad (2.7)$$

ここで、 $S_H$  は浮体の没水面、 $\phi_I$  は入射波ポテンシャルである. 離散化により、 $S_H$  の表面上に配置される  $N$  個の節点における未知ポテンシャル  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を未知数とする連立一次方程式に帰着される (選点法).

図-2.1 において  $L = 3000\text{m}$ ,  $B = 480\text{m}$ ,  $d = 1.5\text{m}$ ,  $h = 20\text{m}$  としたモデルについて入射波  $200\text{m}$ 、入射角  $x$  軸から  $\pi/3$ 、節点数  $N = 12193$  としてベンチマーク解析を行う.

Table 2.1 GMRES-IR の収束回数

$K$	$M = 10$	$M = 20$	$M = 30$	$M = 40$
0(%)	680	335	236	190
10(%)	564	305	202	174
20(%)	520	264	<b>192</b>	<b>172</b>
30(%)	533	239	196	174
40(%)	<b>410</b>	242	195	177
50(%)	533	<b>238</b>	202	179

表-2.1 は、この問題から現れるモデル (節点数  $N = 12193$ ) に対する GMRES-IR の収束回数を表にしたものである. ここで、 $M$  は構成される Krylov 部分空間の最大の次元であり、 $K$  は保存する近似固有ベクトルの数である. 例えば  $K$  が 10(%) であるとは  $M$  のうち 10(%) を保存することを意味する.  $K$  が連立一次方程式の解への収束

Table 2.2 GMRESとORTHOMINとGMRES-IRの収束回数

$M$	GMRES	ORTHOMIN	GMRES-IR
10	680	400	410
20	335	268	238
30	236	251	192
40	190	219	172
50	173	236	—
60	159	214	—
70	141	173	—
80	142	156	—
90	142	136	—
100	137	129	—
110	127	116	—
120	115	115	—

に関する影響を調べるため、 $K$ として50(%)までのデータを取った。 $K$ が0であるとは、通常のGMRES( $M$ )を意味する。また、収束回数は $\|r\|_2 \leq 10^{-3}\|b\|_2$ が満たされる最小の数とした。表-2.2、表-2.3はGMRES( $M$ )とORTHOMIN( $M$ )<sup>35, 8)</sup>とGMRES-IR( $M, *$ )を表-2.1と同じモデルに対して比較した結果である。GMRES-IR( $M, *$ )の $*$ は表-2.1のなかで一番速く収束したもの(太字で表示)を選んでいる。表-2.4は $M = 20$ と一定にして、 $K$ を大きくさせたときの表である。

また、GMRES-IRの収束特性を図-2.2, 2.3, 2.4, 2.5に表す。水平方向の目盛は反復回数を表し、垂直方向の目盛は対数スケールでの相対残差ノルムを表す。実線で描かれているのがGMRES-IRである。反復はすべて初期値 $x_0 = 0$ から始め、DELL Precision 340 (Intel Pentium IV 1.80GHz)で倍精度で計算した。

このモデルに対しては、 $K$ として $M$ の30(%)から50(%)に選べばよいことが分かる。そして、GMRES-IR(20,10)はGMRES(30)と、GMRES-IR(30,6)はGMRES(40)と、GMRES-IR(40,10)はGMRES(50)と同じくらいの反復回数で収束していることが分かる。GMRES-IR(10,4)はGMRES(20)には及ばないが、かなり接近している。すなわち、いずれの場合もGMRES-IR( $M, K$ )では従来のGMRES( $M$ )と比較して、より少ない記憶容量で同程度の反復回数で収束していることが分かる。また表-2.4より $M$ を固定して

Table 2.3 GMRESとORTHOMINとGMRES-IRの収束までの計算時間(秒)

$M$	GMRES	ORTHOMIN	GMRES-IR
10	27616.8	15289.4	17607.2
20	13020.4	10351.4	9637.8
30	9031.4	9671.1	7334.7
40	7220.8	8429.4	6590.0

Table 2.4 GMRES-IR(20,  $K$ )の収束回数

$K$	0	2	4	6	8
収束回数	335	305	264	239	242
$K$	10	12	14	16	18
収束回数	238	252	266	271	513

$K$ を大きくしていくと収束が悪くなっていくことも分かる.

なお, この問題に対しては  $M$  を 40 より大きくすると  $r_M = V_{K+1}\bar{f}$  による値と  $r_M = b - Ax_M$  による値がずれてしまい, そのまま実行しても解に収束しなかった. このためリスタート時に  $r_M = V_{K+1}\bar{f}$  と  $r_M = b - Ax_M$  の両方の値が一致しているかを確認する必要がある.

この2つの値が一致しない原因として, 非Hermite行列  $G$  の固有値である調和Ritz値群が精度よく計算されていないためではないかと考えている. 今後, LAPACK<sup>2)</sup>により  $G$  に関する誤差限界を計算する必要がある.

## 2.4 第2章のまとめ

ここでは、本章の内容を箇条書きで簡単にまとめる。

1. 原論文<sup>32, 16)</sup>では必ずしも陽な形で与えられていないGMRES-IRのアルゴリズムを陽な形で与え、詳しく記述した。
2. 超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題にGMRES-IRを適用して、そのベンチマーク計算結果を表した。
3. この問題に対しては、保存するベクトルの数 $K$ は探索空間の張る最大の次元 $M$ の30(%)から50(%)に固定できることが分かった。
4. この問題に対しては、リスタート版GMRES( $M$ )と同じ記憶容量において、収束に到るまでの反復回数を少なくできた。
5. この問題に対しては、 $M$ が30以下の時は近似固有値の情報が強く反映された。すなわち、このような条件下で、本手法が従来のGMRES( $M$ )に対してより有効に用いられる。
6. この問題に対しては、 $M$ を40より大きくすると $r_M = V_{K+1}\bar{f}$ による値と $r_M = b - Ax_M$ による値がずれてしまい、そのまま実行しても解に収束しなかった。

## 2.5 第2章の付録

ここでは,  $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_M$  が全て異なっていて,  $H_M$  の subdiagonal 上の成分  $h_{i,i-1}$  ( $1 \leq i \leq M-1$ ) が全て0でないという仮定において,

$$\text{Span}\{\tilde{g}_{P+1}, \dots, \tilde{g}_M\} = \text{Span}\{Qe_1, \dots, Qe_K\} \quad (2.8)$$

の証明を Morgan による証明<sup>32)</sup>とは異なる方法で与える.

その証明を6段に分けて記述する.

第1段:

$$\text{Span}\{\tilde{g}_{P+1}, \dots, \tilde{g}_M\} = \text{Ker} \left( \prod_{k=P+1}^M (G - \tilde{\theta}_k I) \right). \quad (2.9)$$

これは,  $\prod_{k=P+1}^M (G - \tilde{\theta}_k I) \tilde{g}_i = \prod_{k=P+1}^M (\tilde{\theta}_i - \tilde{\theta}_k) \tilde{g}_i$  ( $1 \leq i \leq P$ ) であるから,  $\text{Im}(\prod_{k=P+1}^M (G - \tilde{\theta}_k I)) \supseteq \text{Span}\{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_P\}$ .  $\prod_{k=P+1}^M (G - \tilde{\theta}_k I) \tilde{g}_i = 0$  ( $P+1 \leq i \leq M$ ) であるから,  $\text{Ker}(\prod_{k=P+1}^M (G - \tilde{\theta}_k I)) \supseteq \text{Span}\{\tilde{g}_{P+1}, \dots, \tilde{g}_M\}$ . また準同形定理<sup>13)</sup>より,  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\prod_{k=P+1}^M (G - \tilde{\theta}_k I)) + \dim_{\mathbb{C}} \text{Im}(\prod_{k=P+1}^M (G - \tilde{\theta}_k I)) = M$  であるので, 包含関係  $\supseteq$  は等号  $=$  であることが分かる. ここで,  $\text{Ker}(\prod_{k=P+1}^M (G - \tilde{\theta}_k I)), \text{Im}(\prod_{k=P+1}^M (G - \tilde{\theta}_k I))$  はそれぞれ線形写像  $\prod_{k=P+1}^M (G - \tilde{\theta}_k I)$  の核と像である.

第2段:

$$\prod_{k=1}^M (G - \tilde{\theta}_k I) = 0. \quad (2.10)$$

これは, Cayley-Hamilton の定理<sup>13)</sup>から得られる.

第3段:

$$\text{Ker} \left( \prod_{k=P+1}^M (G - \tilde{\theta}_k I) \right) = \text{Span} \left\{ \prod_{k=1}^P (G - \tilde{\theta}_k I) e_1, \dots, \prod_{k=1}^P (G - \tilde{\theta}_k I) e_K \right\}. \quad (2.11)$$

包含関係  $\supseteq$  は (2.10) から分かる. また,  $G = H_M + |h_{M+1,M}|^2 H_M^{-H} e_M e_M^H$  であつたから,  $g_{i,i-1} = h_{i,i-1}$  ( $1 \leq i \leq M-1$ ). したがって,  $G$  の subdiagonal 上の成分は全て0でないの  
で,  $\prod_{k=1}^P (G - \tilde{\theta}_k I) e_1, \dots, \prod_{k=1}^P (G - \tilde{\theta}_k I) e_K$  は一次独立である. このことから包含関係  $\supseteq$  は等号  $=$  であることが分かる.

第4段:

$$\prod_{k=1}^P (G - \tilde{\theta}_k I) e_i = \prod_{k=1}^P (H_M - \tilde{\theta}_k I) e_i \quad (1 \leq i \leq K). \quad (2.12)$$

これは,  $G$  に  $H_M + |h_{M+1,M}|^2 H_M^{-H} e_M e_M^H$  を代入し, また  $H_M$  が Hessenberg 行列であることから,  $|h_{M+1,M}|^2 H_M^{-H} e_M e_M^H$  の項が影響しないことが分かる.

第5段:

$Q^{(k)}, R^{(k)}$  ( $1 \leq k \leq P$ ) を, シフトとして  $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_P$  を選んだときに, IRAにより得られた行列とする.  $Q = Q^{(1)} \dots Q^{(P)}, R = R^{(P)} \dots R^{(1)}$  とおく.

$$\prod_{k=1}^P (H_M - \tilde{\theta}_k I) = QR. \quad (2.13)$$

これは,  $P$  に関する帰納法により示される.  $Q_1 = Q^{(1)} \dots Q^{(P-1)}, R_1 = R^{(P-1)} \dots R^{(1)}$  とおく. 定義から  $Q_1^H H_M Q_1 - \tilde{\theta}_P I = Q^{(P)} R^{(P)}$  であったから,  $(H_M - \tilde{\theta}_P I) Q_1 R_1 = Q_1 Q^{(P)} R^{(P)} R_1$ . また, 帰納法の仮定から,  $\prod_{k=1}^{P-1} (H_M - \tilde{\theta}_k I) = Q_1 R_1$  であった.

第6段:

$$\text{Span} \left\{ \prod_{k=1}^P (H_M - \tilde{\theta}_k I) e_1, \dots, \prod_{k=1}^P (H_M - \tilde{\theta}_k I) e_K \right\} = \text{Span} \{ Q e_1, \dots, Q e_K \}. \quad (2.14)$$

これは, (2.13) の両辺に  $e_i$  ( $1 \leq i \leq K$ ) を掛けることにより, また  $R$  が上三角行列であったことから分かる.

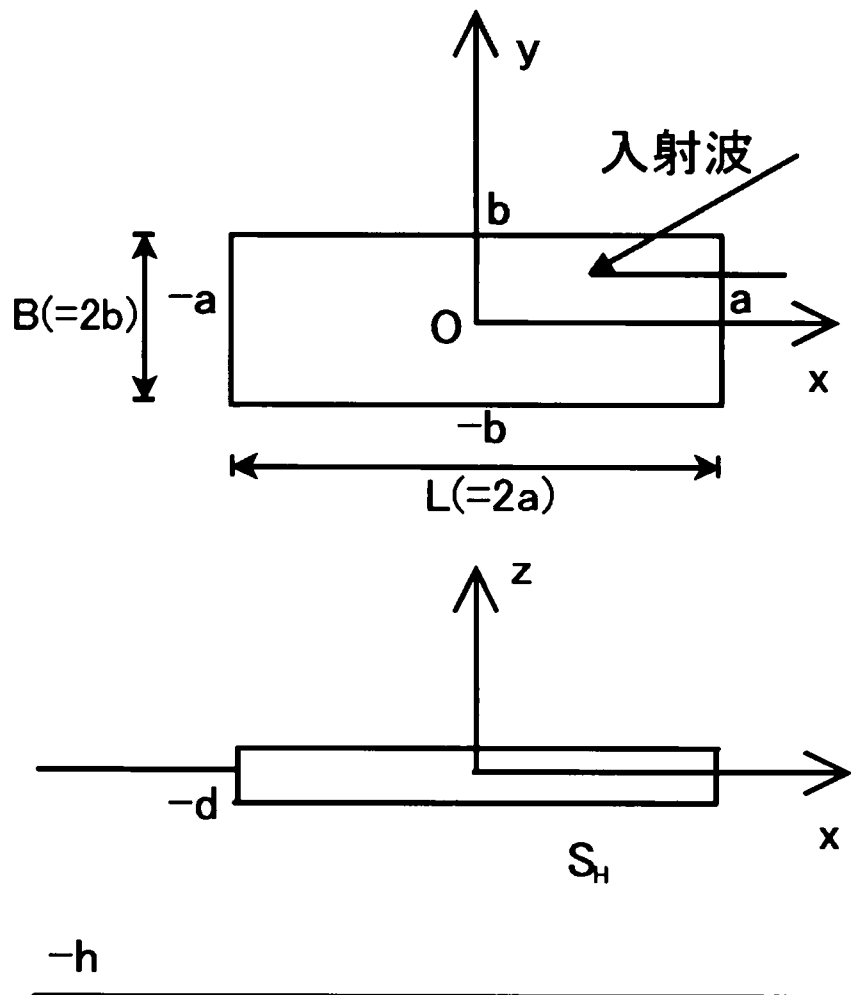


Fig. 2.1 ポンツーン型浮体

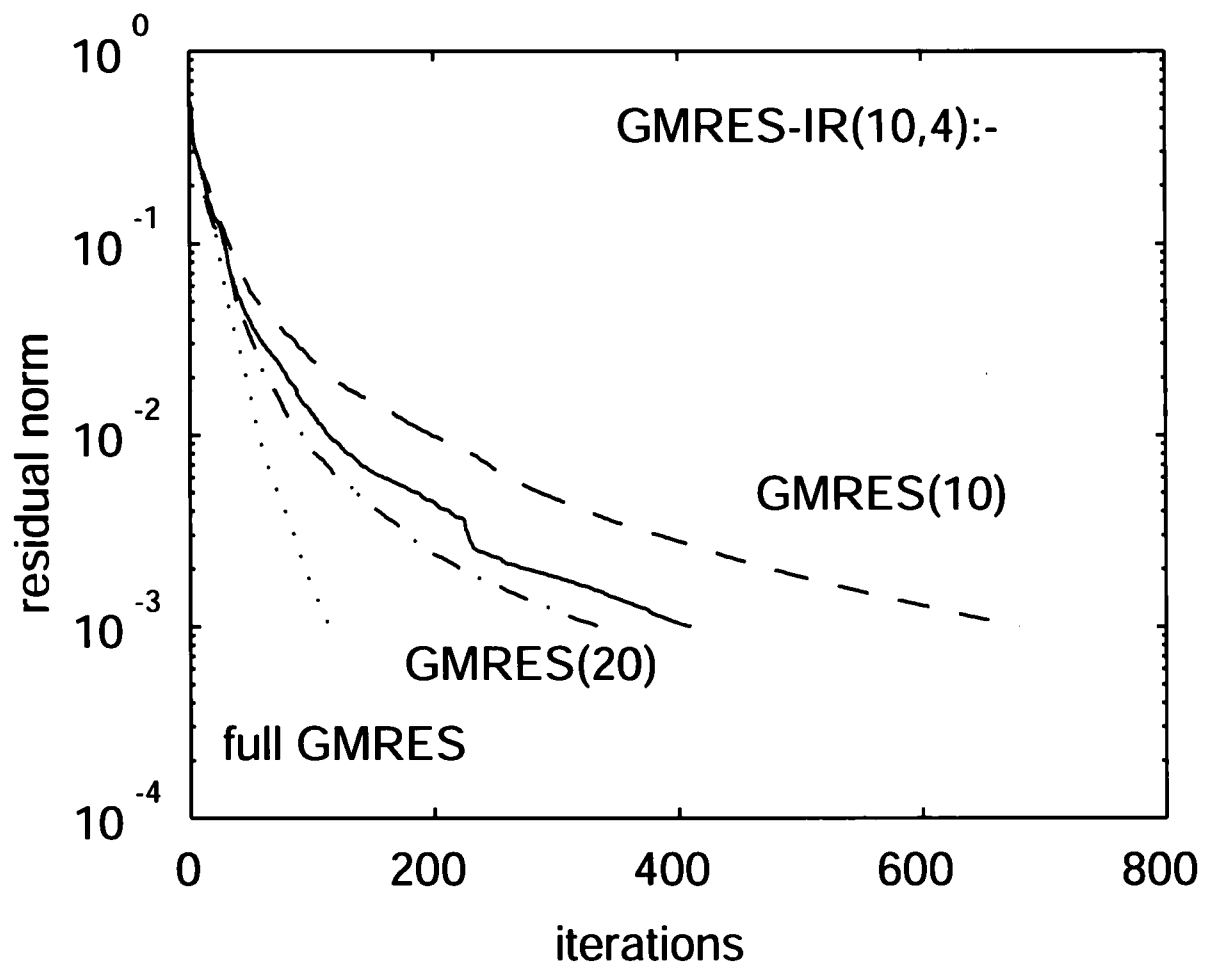


Fig. 2.2 GMRES-IR(10,4) の収束特性(実線)



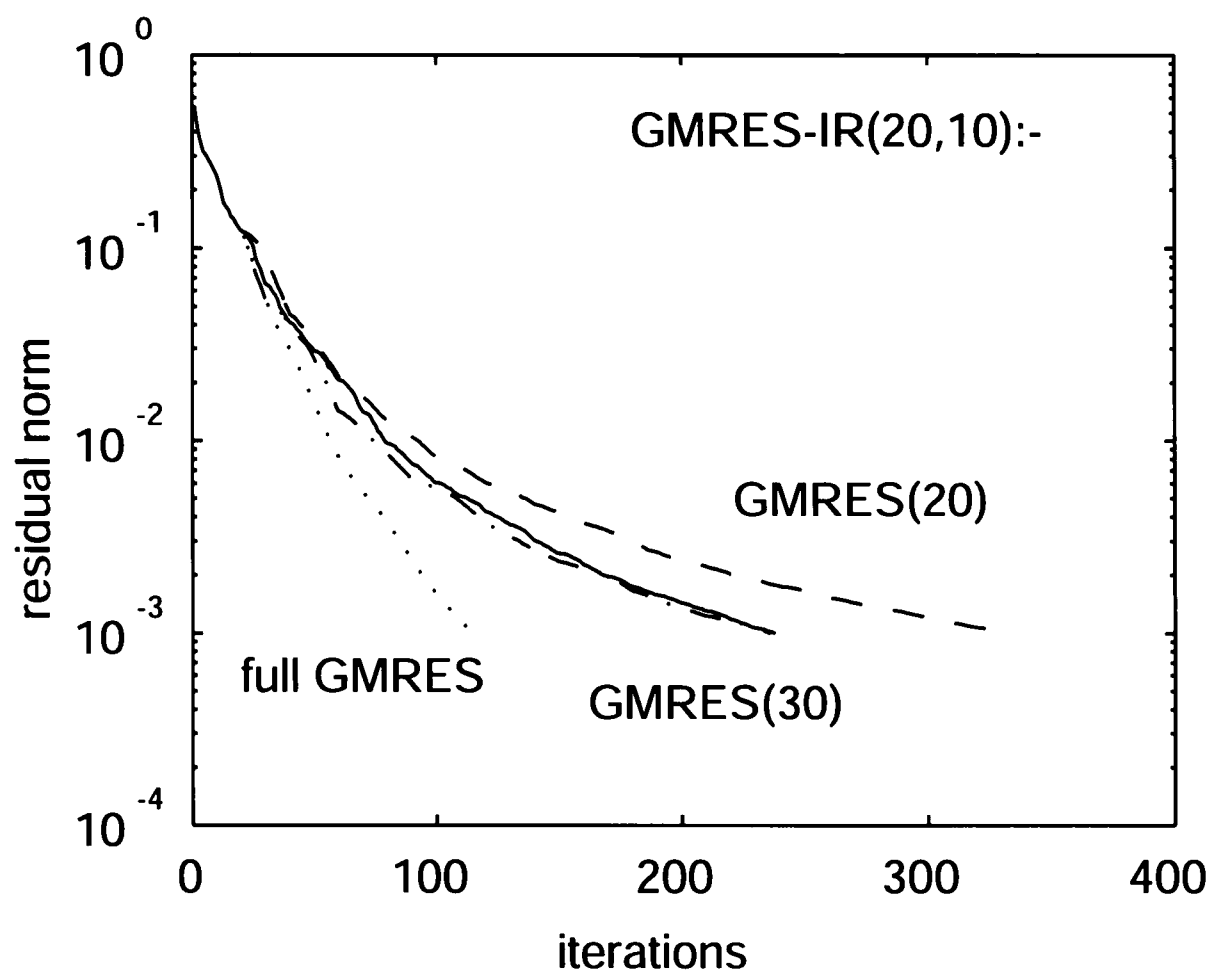


Fig. 2.3 GMRES-IR(20,10)の収束特性(実線)

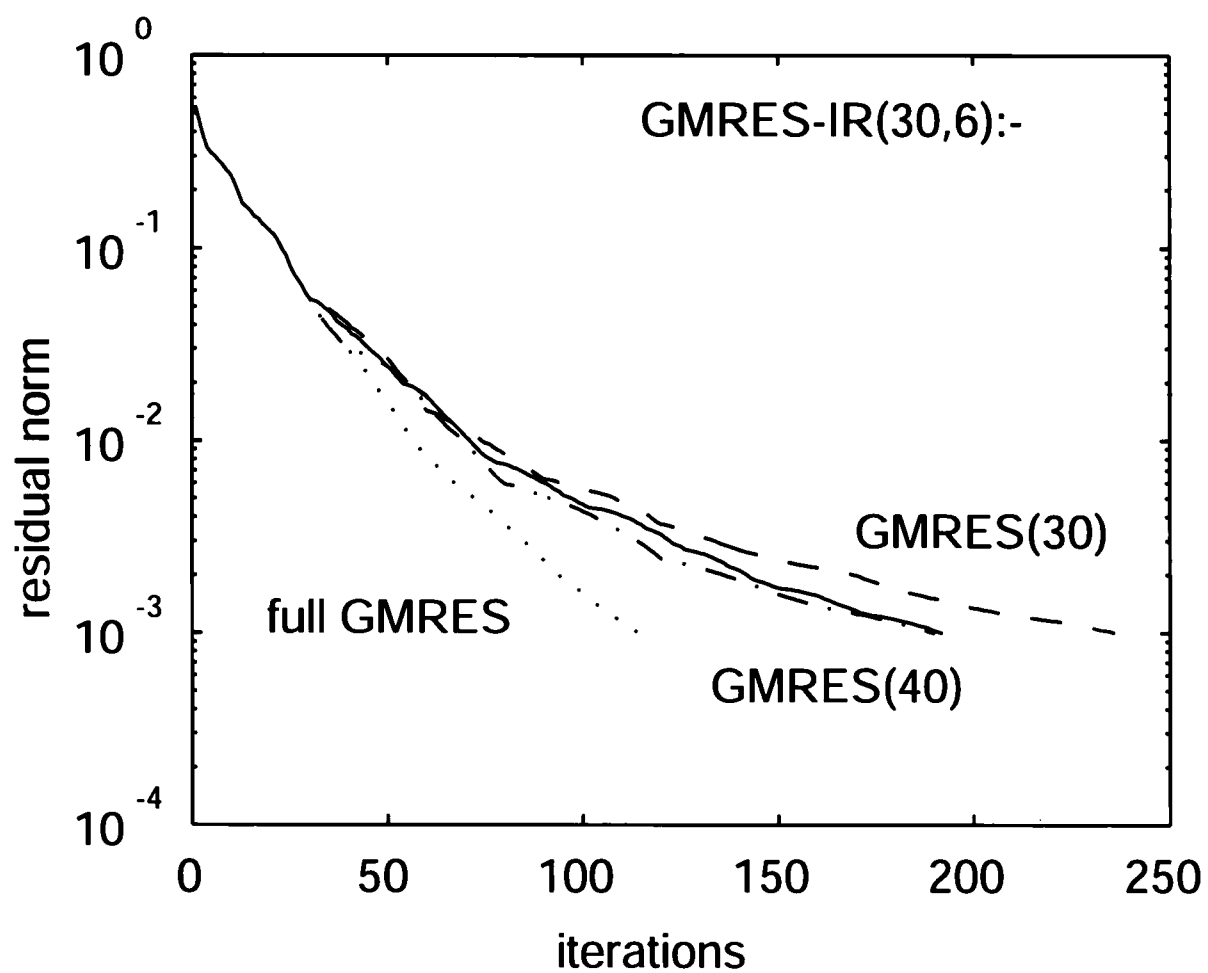


Fig. 2.4 GMRES-IR(30,6)の収束特性(実線)

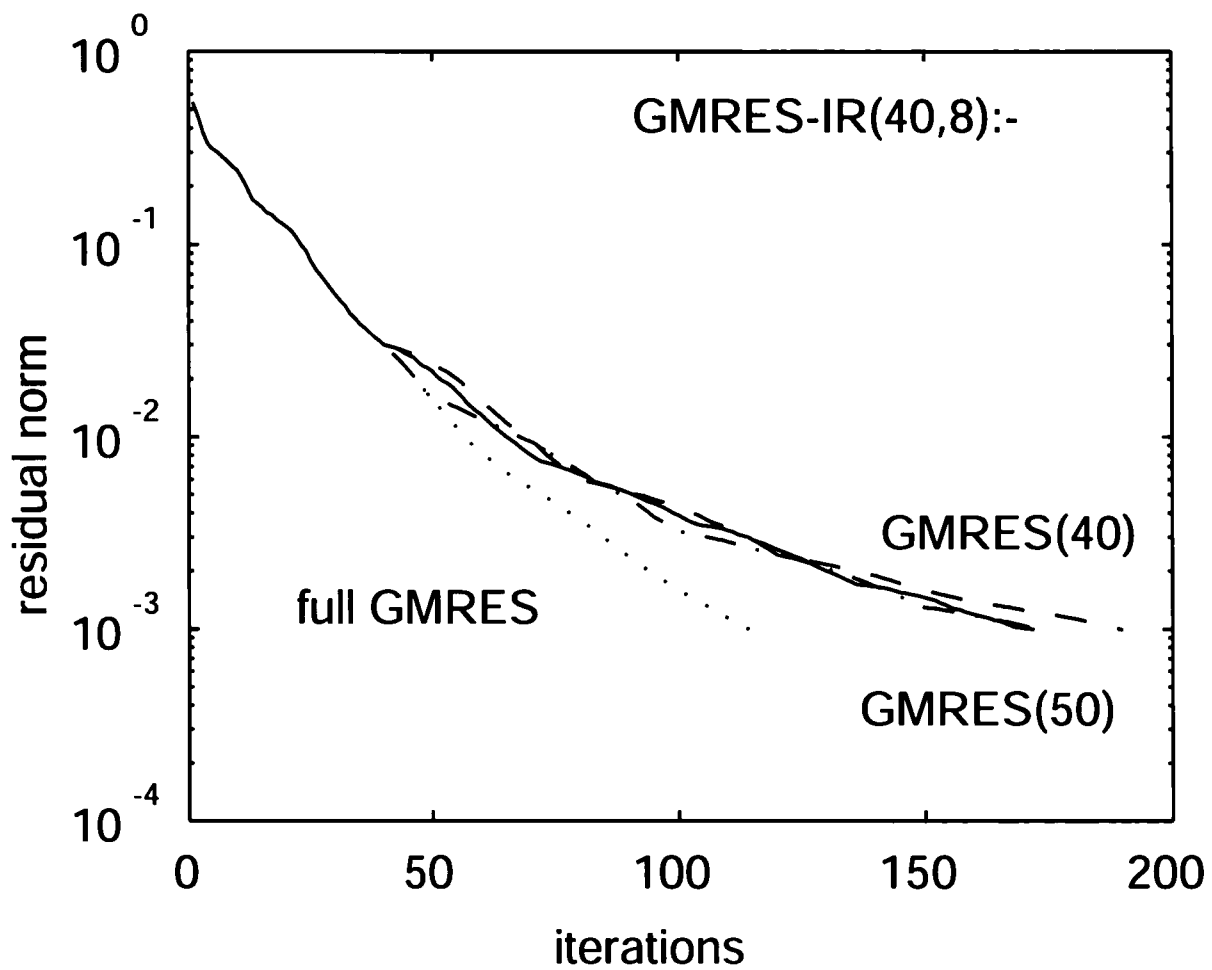


Fig. 2.5 GMRES-IR(40,8)の収束特性(実線)

## 第3章 超大型浮体の波浪応答解析への GMRES-DRの適用

### 3.1 はじめに

超大型浮体まわりの回折・散乱波浪場に関する境界値問題の解析において、外部領域が非有界で境界条件が単純でないことから、流体に対しては境界要素法(BEM)が、構造物に対しては有限要素法(FEM)が適しており、流体と構造物の境界における速度の法線成分の連続性により両手法が結合される<sup>1, 49)</sup>。最終的には、非Hermiteかつ密行列を係数とする大規模連立一次方程式

$$Ax = b \tag{3.1}$$

を解くことに帰着する。

大規模かつ非Hermite行列に対する反復法として、the generalized minimal residual method (GMRES)<sup>41, 52, 53)</sup>がよく知られている。しかし、GMRESは収束に到るまでの反復回数が増加するに従って計算量および記憶容量をたくさん必要とするため、実際にはリスタート版GMRES( $M$ )<sup>41, 52, 53)</sup>が用いられ、収束が悪化する。

GMRES( $M$ )が生成するKrylov部分空間<sup>39)</sup>は、絶対値の大きい固有値群に対応する固有ベクトル群が張る部分空間を近似する傾向にある<sup>39)</sup>。このことから、固有ベクトルの情報を残すことで収束性の改善が期待できると考えられ、the restarted GMRES method augmented with eigenvectors (GMRES-E)<sup>31)</sup>、the implicitly restarted GMRES (GMRES-IR)<sup>32, 16)</sup>へと改良されている。これらが構成する近似解列は1サイクルにおいては同じであるが、GMRES-IRを本解析例に適用したとき、探索空間の最大の次元を40より大きく取ると数値的に不安定になる現象を確認した<sup>20)</sup>。その原因は近似固有ベクトルの計算にthe implicitly restarted Arnoldi (IRA)<sup>44, 17)</sup>を用いていたためであった。

そこで本章では、探索空間の最大の次元に関する制約の解消を目的として、近似固有ベクトルの計算をQR法<sup>35)</sup>により実行するthe GMRES with deflated restarting (GMRES-DR)<sup>33)</sup>の導入を試みる。原論文では必ずしも陽な形ではアルゴリズムが与えられていないため、第3.2節ではGMRES-DRを具体的なアルゴリズムを含めて詳し

く記述する. 第3.3節ではGMRES-DRを超大型浮体まわりの回折・散乱波浪場に関する境界値問題の解析に実際に適用し, そのベンチマーク計算の結果から本手法が数値的に安定であることを示す. 第3.4節では本章の内容を簡単にまとめる.

## 3.2 GMRES-DR

連立一次方程式を反復法により解く方法の一つとして the GMRES with deflated restarting (GMRES-DR)<sup>33)</sup>が知られている。GMRES-DRはリスタート時に、生成された Krylov 部分空間<sup>39)</sup>を、その部分空間における絶対値の小さい調和 Ritz 値群<sup>32, 34, 33)</sup>に対応する調和 Ritz ベクトル群<sup>32, 34, 33)</sup>が張る部分空間に圧縮し、新しく生成される探索空間に含ませる。生成された部分空間は Krylov 部分空間であり、この部分空間は絶対値の大きい固有値群に対応する  $A$ -不変部分空間<sup>13)</sup>を近似する傾向にある<sup>39)</sup>ため、計算された調和 Ritz 値群のうち絶対値の小さいものに対応する調和 Ritz ベクトル群を保存することにより、生成される探索空間が停滞しにくくなると期待できる。

ただし、GMRES-DRが生成していく探索空間は、GMRESが生成していく探索空間の部分空間になるので、GMRESより速く収束することはない。

以下において、 $A$ は $N$ 次元正則複素行列、 $b$ は $N$ 次元複素ベクトル、 $x_0$ は初期ベクトル、 $r_0 = b - Ax_0$ は初期残差を表す。

ここでは、GMRES-DRを構成している方法を8つの小節に分けて記述する。第3.2.1-3.2.3小節ではGMRESで使われている方法を記述する。第3.2.4-3.2.6小節ではGMRES-DRのリスタートの部分を記述する。第3.2.7-3.2.8小節において、GMRES-DRのアルゴリズムを与える。

### 3.2.1 Krylov部分空間

GMRES-DRによる近似解列 $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ は、ある探索空間の中で残差 $r_m = b - Ax_m$ のノルム $\|r_m\|_2$ が最小となるように構成される。ここでは探索空間として、Krylov 部分空間<sup>39)</sup>を扱う。

$\mathbb{C}^N$ の部分空間 $S$ がKrylov部分空間であるとは、ある正の整数 $m$ とある $N$ 次元ベクトル $v$ が存在して、

$$S = \text{Span}\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\} \quad (3.2)$$

と表されることである。ここで、 $\text{Span}\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\}$ は、 $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ が生成する $\mathbb{C}^N$ の部分空間である。

### 3.2.2 Arnoldi法

$N$ 次元行列 $A$ を, 固有値問題における中間形である Hessenberg 形<sup>35)</sup>に変換し, さらに Krylov 部分空間の正規直交基底を構成する方法として Arnoldi 法<sup>39, 35, 44)</sup>が知られている.

#### Arnoldi法

初期ベクトル  $v_1$  ( $\|v_1\|_2 = 1$ ) をとる;

for  $m = 1, \dots, M$  do

$w = Av_m$ ;

    for  $i = 1, \dots, m$  do

$h_{im} = (w, v_i)$ ;

$w = w - v_i h_{im}$ ;

$h_{m+1,m} = \|w\|_2$ ;

$v_{m+1} = w/h_{m+1,m}$

$\bar{H}_M$  を Arnoldi 法により得られた  $(M+1) \times M$  行列とする.  $H_M$  を  $\bar{H}_M$  から第  $M+1$  行を取り除いた  $M \times M$  Hessenberg 行列とする.  $V_{M+1}$  を  $v_1$  から  $v_{M+1}$  を並べた  $N \times (M+1)$  行列,  $V_M$  を  $V_{M+1}$  から第  $M+1$  列を取り除いた行列とする. また  $e_M$  は第  $M$  成分のみが 1 である単位ベクトルであり,  $e_M^H$  は  $e_M$  の Hermite 転置である. このとき次の関係が成立する.

$$AV_M = V_M H_M + h_{M+1,M} v_{M+1} e_M^H \quad (3.3)$$

$$= V_{M+1} \bar{H}_M. \quad (3.4)$$

また,  $v_1, \dots, v_M$  は Krylov 部分空間  $\text{Span}\{v_1, Av_1, \dots, A^{M-1}v_1\}$  の正規直交基底をなしている.

### 3.2.3 QR分解

近似解  $x_M$  は,  $x_M$  が  $x_0 + \text{Span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{M-1}r_0\}$  を動くとき, 残差  $r_M$  のノルムが最小となるように構成される.

$x_M$  は, ある  $M$  次元ベクトル  $d$  により  $x_M = x_0 + V_M d$  と表され,

$$r_M = b - Ax_M \quad (3.5)$$

$$= r_0 - AV_M d \quad (3.6)$$

$$= V_{M+1}(\|r_0\|_2 e_1 - \bar{H}_M d) \quad (3.7)$$

であるから,

$$\|r_M\|_2 = \|\|r_0\|_2 e_1 - \bar{H}_M d\|_2 \quad (3.8)$$

となり,  $d$  を求める最小2乗問題に帰着される.  $\bar{H}_M$  を  $M+1$  次元ユニタリ行列  $\bar{Q}_M$  と,  $i > j$  のとき  $r_{ij} = 0$  である  $(M+1) \times M$  行列  $\bar{R}_M$  により,  $\bar{H}_M = \bar{Q}_M \bar{R}_M$  とQR分解する. このとき,  $R_M$  を  $\bar{R}_M$  から第  $M+1$  行を取り除いた  $M$  次元上三角正則行列とし,  $c$  を  $\bar{Q}_M^H \|r_0\|_2 e_1$  の第  $M+1$  成分を取り除いた  $M$  次元ベクトルとすると,  $d = R_M^{-1} c$  が求めるものである. ここで,  $\bar{Q}_M^H$  は  $\bar{Q}_M$  のHermite転置である. したがってこの  $d$  により,  $x_M = x_0 + V_M d$  は  $r_M$  のノルムを最小にする.

$(M+1) \times M$  行列  $\bar{H}_M$  のQR分解には, LAPACK<sup>2)</sup>のルーチンZGEQRFとZUNMQRを用いて計算した.

### 3.2.4 調和Ritz値および調和Ritzベクトル

$N$  次元ベクトル空間  $\mathbf{C}^N$  は,  $N$  次元行列  $A$  の広義固有空間により直和分解される<sup>13)</sup>. また  $A$  がHermite行列のとき, 探索空間  $\text{Span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{M-1}r_0\}$  は絶対値の大きな固有値群に対応する固有ベクトル群が張る部分空間を近似する傾向がある<sup>39)</sup>. 計算された近似固有値群のうち絶対値の小さいものに対応する部分空間を保存することにより探索空間が停滞しにくくなると期待できる.

$T$  を  $M$  次元部分空間とする.  $(\theta_i, y_i)$  が  $A$  の  $T$  における調和Ritz値および調和Ritzベクトルであるとは,  $W$  を  $T$  の基底を並べた  $N \times M$  行列とすると,

$$W^H A^{-1} W g_i = \frac{1}{\theta_i} W^H W g_i \quad (3.9)$$

$$y_i = A^{-1} W g_i \quad (3.10)$$

により定義する. ここで  $g_i$  は0でない  $M$  次元ベクトルである. また,  $(\theta_i, y_i)$  は  $T$  の基底  $W$  の選び方に依存しない.



ここでは、 $T = \text{Span}\{AV_M\}$ として調和Ritz値および調和Ritzベクトルを計算する。このとき、 $G_M = H_M + |h_{M+1,M}|^2 H_M^{-H} e_M e_M^H$ とおき、 $(\theta_i, g_i)$ を $G_M$ のeigenpairとし、 $y_i = V_M g_i$ とおくと、 $(\theta_i, y_i)$ は $A$ の $T$ における調和Ritz値および調和Ritzベクトルとなっている。ここで、 $H_M^{-H}$ は $H_M$ の逆行列のHermitic転置である。

$\bar{c}$ を $M+1$ 次元ベクトルで $r_M = V_{M+1}\bar{c}$ を満たすものとする。このとき $G_M$ は次のように表される。

$$G_M = H_M - \frac{h_{M+1,M}}{c_{M+1}} c e_M^H. \quad (3.11)$$

ここではこの式を用いて $G_M$ を計算する。

このとき次の関係が成り立つ。

$$AV_M = V_M G_M + \frac{h_{M+1,M}}{c_{M+1}} r_M e_M^H. \quad (3.12)$$

したがって、 $\gamma_i = \frac{h_{M+1,M}}{c_{M+1}} e_M^H g_i$ とおけば、

$$Ay_i = \theta_i y_i + \gamma_i r_M \quad (3.13)$$

が成り立つ。

$G_M$ の固有値および固有ベクトル $(\theta_i, g_i)$  ( $i = 1, \dots, M$ )は、LAPACK<sup>2)</sup>のルーチンZGEEVを用いて計算した。

### 3.2.5 Krylov部分空間(リスタート)

$y_1, \dots, y_K$ を保存する調和Ritzベクトル群として、 $x_K := x_M$ ,  $r_K := r_M$ とおくと、GMRES-DRのリスタート以降の探索空間 $S^{\text{new}}$ は次のようになる。

$$S^{\text{new}} = \text{Span}\{y_1, \dots, y_K, r_K, Ar_K, \dots, A^{M-K-1}r_K\}. \quad (3.14)$$

ここでは、 $S^{\text{new}}$ がKrylov部分空間であることを3段に分けて記述する。

第1段:

$\omega_i(T) = \frac{\prod_{l=1}^K (\theta_l - T)}{\theta_i - T}$  とおくと,

$$\sum_{i=1}^K \frac{\theta_i^j}{\omega_i(\theta_i)} = 0 \quad (0 \leq j \leq K-2), \quad (3.15)$$

$$\sum_{i=1}^K \frac{\theta_i^{K-1}}{\omega_i(\theta_i)} = (-1)^{K-1}. \quad (3.16)$$

実際,  $\pi_i(T) = \frac{\prod_{l=1}^{K-1} (\theta_l - T)}{\theta_i - T}$  とおくと,

$$\sum_{i=1}^K \frac{\theta_i^j}{\omega_i(\theta_i)} = \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\theta_i^j}{\pi_i(\theta_i)} \frac{1}{\theta_K - \theta_i} + \frac{\theta_K^j}{\prod_{l=1}^{K-1} (\theta_l - \theta_K)} \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{\prod_{l=1}^{K-1} (\theta_l - \theta_K)} \left\{ \theta_K^j - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\theta_i^j}{\pi_i(\theta_i)} \pi_i(\theta_K) \right\} \quad (3.18)$$

が成り立つ.  $F_j(T) = T^j - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\theta_i^j}{\pi_i(\theta_i)} \pi_i(T)$  とおくと,  $F_j(\theta_1) = \dots = F_j(\theta_{K-1}) = 0$  である.

$0 \leq j \leq K-2$  のとき  $T$  に関する多項式  $F_j(T)$  の次数は  $K-2$  以下であるから,  $F_j(T) = 0$ ,

また  $j = K-1$  のとき  $F_j(T)$  の最高次の係数は 1 であるから,  $F_j(T) = \prod_{l=1}^{K-1} (T - \theta_l)$  である.

ここで,  $\theta_1, \dots, \theta_{K-1}$  はすべて異なっていると仮定している.

第2段:

$$s = \sum_{i=1}^K \frac{1}{\gamma_i \omega_i(\theta_i)} y_i \quad \text{とおくと,}$$

$$A^j s = \sum_{i=1}^K \frac{\theta_i^j}{\gamma_i \omega_i(\theta_i)} y_i \quad (0 \leq j \leq K-1), \quad (3.19)$$

$$A^{K-1} s = \sum_{i=1}^K \frac{\theta_i^K}{\gamma_i \omega_i(\theta_i)} y_i + (-1)^{K-1} r_K. \quad (3.20)$$

第3段:

$$\text{Span}\{s, As, \dots, A^{M-1}s\} = \text{Span}\{y_1, \dots, y_K, r_K, Ar_K, \dots, A^{M-K-1}r_K\}. \quad (3.21)$$

実際,  $\text{Span}\{s, As, \dots, A^{M-1}s\} \subseteq \text{Span}\{y_1, \dots, y_K, r_K, Ar_K, \dots, A^{M-K-1}r_K\}$  が成り立つが, 近似解  $x_M$  は真の解ではないとしているので, 左辺の次元は  $M$  である. よって, 包含関係は等号となる.

### 3.2.6 Arnoldi法(リスタート)

$\text{Span}\{y_1, \dots, y_K, r_K\}$ の正規直交基底 $V_{K+1}^{\text{new}}$ と $(M+1) \times K$ 行列 $\bar{H}_K^{\text{new}}$ で $AV_K^{\text{new}} = V_{K+1}^{\text{new}} \bar{H}_K^{\text{new}}$ を満たすものを構成し, Arnoldi法により $V_{K+1}^{\text{new}}$ を $V_{M+1}^{\text{new}}$ に,  $\bar{H}_K^{\text{new}}$ を $\bar{H}_M^{\text{new}}$ に拡張する.

$M \times K$ 行列 $(g_1, \dots, g_K)$ を列ベクトルが直交している $M \times K$ 行列 $Q_K$ と $K \times K$ 上三角行列 $R_K$ により $(g_1, \dots, g_K) = Q_K R_K$ とQR分解する. 次に $\bar{c}$ を $Q_K$ に対して直交化したものを $q_{K+1}$  ( $\|q_{K+1}\|_2 = 1$ ) とし,  $Q'_K = \begin{pmatrix} Q_K \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{Q}_{K+1} = (Q'_K, q_{K+1})$ とおくと, 適当な $K+1$ 次元ベクトル $\bar{c}^{\text{new}}$ により,

$$\bar{c} = \bar{Q}_{K+1} \bar{c}^{\text{new}} \quad (3.22)$$

と表される. ここで,  $y_1 = V_M g_1, \dots, y_K = V_M g_K, r_K = V_{M+1} \bar{c}$ であった.

このとき,  $\bar{H}_K^{\text{new}} = \bar{Q}_{K+1}^H \bar{H}_M Q_K$ とおくと,

$$\bar{H}_M Q_K = \bar{Q}_{K+1} \bar{H}_K \quad (3.23)$$

と表されることを示したいが,  $\bar{H}_M q_1, \dots, \bar{H}_M q_K$ が $q_1, \dots, q_{K+1}$ が生成する部分空間に属していることを示せばよい.  $\Theta_K = \text{Diag}(\theta_1, \dots, \theta_K)$ とおく. ここで,  $\text{Diag}(\theta_1, \dots, \theta_K)$ は対角要素が $\theta_1, \dots, \theta_K$ である $K \times K$ 対角行列である.

$$\bar{H}_M Q_K = \left( \begin{pmatrix} G_K \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h_{M+1,M}}{c_{M+1}} \bar{c} e_M^H \right) Q_K \quad (3.24)$$

$$= \bar{Q}_{K+1} \left( \begin{pmatrix} R_K \Theta_K R_K^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h_{M+1,M}}{c_{M+1}} \bar{c}^{\text{new}} e_M^H Q_K \right). \quad (3.25)$$

次に,  $V_{K+1}^{\text{new}} = V_{M+1} \bar{Q}_{K+1}$ とおくと,

$$AV_K^{\text{new}} = AV_M Q_K \quad (3.26)$$

$$= V_{M+1} \bar{H}_M Q_K \quad (3.27)$$

$$= V_{M+1} \bar{Q}_{K+1} \bar{H}_K^{\text{new}} \quad (3.28)$$

$$= V_{K+1}^{\text{new}} \bar{H}_K^{\text{new}}, \quad (3.29)$$

$$r_K = V_{M+1} \bar{c} \quad (3.30)$$

$$= V_{M+1} \bar{Q}_{K+1} \bar{c}^{\text{new}} \quad (3.31)$$

$$= V_{K+1}^{\text{new}} \bar{c}^{\text{new}} \quad (3.32)$$

が成り立つ.

Arnoldi法により  $V_{K+1}^{\text{new}}$  を  $V_{M+1}^{\text{new}}$  に,  $\bar{H}_K^{\text{new}}$  を  $\bar{H}_M^{\text{new}}$  に拡張すると,  $V_M^{\text{new}}$  は  $\text{Span}\{y_1, \dots, y_K, r_K, Ar_K, \dots, A^{M-K-1}r_K\}$  の正規直交基底をなし,  $AV_M^{\text{new}} = V_{M+1}^{\text{new}}\bar{H}_M^{\text{new}}$  が成り立つ.  $x_M$  は,  $x_M$  が  $x_K + \text{Span}\{y_1, \dots, y_K, r_K, Ar_K, \dots, A^{M-K-1}r_K\}$  を動くとき, 残差  $r_M$  のノルムが最小となるように構成される.

$x_M$  は, ある  $M$  次元ベクトル  $d$  により  $x_M = x_K + V_M^{\text{new}}d$  と表されるので,

$$r_M = b - Ax_M \quad (3.33)$$

$$= r_K - AV_M^{\text{new}}d \quad (3.34)$$

$$= V_{M+1}^{\text{new}}(\bar{c}^{\text{new}} - \bar{H}_M^{\text{new}}d) \quad (3.35)$$

であるから,

$$\|r_M\|_2 = \|\bar{c}^{\text{new}} - \bar{H}_M^{\text{new}}d\|_2 \quad (3.36)$$

となり,  $d$  を求める最小2乗問題に帰着される. ここで,  $\bar{c}^{\text{new}}$  は  $K+1$  次元ベクトルであったが, その成分を0により拡張した  $M+1$  次元ベクトルと考えている.

### 3.2.7 GMRES-DR

以上で準備が終わり, GMRES-DR<sup>33)</sup> のアルゴリズムとその記憶容量に関する記述に入る. GMRES-DR は, リスタート版 GMRES( $M$ ) に調和Ritzベクトル群の情報を組み込んだものである. はじめに GMRES を  $M$  回実行し, その次に調和Ritz値群および調和Ritzベクトル群を計算する. 絶対値の小さい調和Ritz値群に対応する調和Ritzベクトル群が張る  $K$  次元の部分空間を, 次に生成する探索空間に含ませてリスタートする. ここで,  $c$  は  $\bar{c}$  の第  $M+1$  成分を除いたベクトル,  $Q'_K = \begin{pmatrix} Q_K \\ 0 \end{pmatrix}$  である.

#### GMRES-DR

1. 探索空間の最大の次元  $M$ , 保存する調和Ritzベクトルの数  $K$  を選ぶ;  
初期ベクトル  $x_0$  を取る;  
 $r_0 = b - Ax_0$ ;
2.  $v_1 = r_0 / \|r_0\|_2$ ;

$$\bar{c} = \|r_0\|_2 e_1;$$

3. Arnoldi法により  $V_{M+1}$  と  $\bar{H}_M$  を求める;

$$\|\bar{c} - \bar{H}_M d\|_2 \text{ を最小にする } d \text{ を求める};$$

4.  $x_M = x_0 + V_M d; r_M = b - Ax_M;$

$$\bar{c} = \bar{c} - \bar{H}_M d;$$

5.  $G_M = H_M - \frac{h_{M+1,M}}{c_{M+1}} c e_M^H;$

QR法により  $G_M$  の固有値および固有ベクトル  $(\theta_1, g_1), \dots, (\theta_M, g_M)$  を求める;

$(\theta_1, g_1), \dots, (\theta_M, g_M)$  を並び替えて,  $|\theta_1| \leq \dots \leq |\theta_M|$  となるようにする;

6.  $(g_1, \dots, g_K) = Q_K R_K$  とQR分解する;

$$q_{K+1} = (I_{K+1} - Q'_K Q_K^H) \bar{c}; q_{K+1} = q_{K+1} / \|q_{K+1}\|_2;$$

$$\bar{Q}_{K+1} = (Q'_K, q_{K+1});$$

$$\bar{c} = \bar{Q}_{K+1}^H \bar{c};$$

$$\bar{H}_K^{\text{new}} = \bar{Q}_{K+1}^H \bar{H}_M Q_K; V_{K+1}^{\text{new}} = V_{M+1} \bar{Q}_{K+1};$$

$$\bar{H}_K = \bar{H}_K^{\text{new}}; V_{K+1} = V_{K+1}^{\text{new}};$$

Arnoldi法の  $K+1$  回目へ進む

$G_M = H_M - \frac{h_{M+1,M}}{c_{M+1}} c e_M^H$  において,  $c_{M+1}$  が0であるときは本方法はブレイクダウンすることになるが, その際は通常のGMRES( $M$ )でリスタートすることになる.

更新された  $v_1, \dots, v_{K+1}$  たちが張る部分空間はまた Krylov 部分空間であり, リスタートをしないGMRESが生成する探索空間の部分空間である. このため, GMRES-DRはGMRESより速く収束することはない.  $K$  を0にとれば, GMRES-DR( $M, 0$ )は通常のGMRES( $M$ )である. 記憶容量は通常のGMRES( $M$ )と比べて  $N(K+1) + (M+1)(M+K) + M^2$  増加するので,  $N$  が  $M$  に比べて十分大きいとき, GMRES-DR( $M, K$ )の記憶容量はGMRES( $M+K$ )とほとんど同じである. また探索空間の中で最小条件を満足しているので, 残差が振動することはなく, 反復回数の増加に対して単調に減少する.

### 3.2.8 GMRES-DRのアルゴリズム

ここでは, GMRES-DRのアルゴリズムを前小節より詳細に与える. GMRES-DR, BASIS, UPDATEの3つのアルゴリズムを掲載している.  $\text{tol}$  は1よりも小さく, マシンイプシロンよりも大きい実数である.  $\text{iter}$  は反復回数,  $\text{rest}$  はリスタート回数である. 配列の成分が0であることが分かっているところには念のため0を代入している.

## GMRES-DR

1.  $M, K$  を選ぶ;  
 初期ベクトル  $x$  を取る;  
 $r = b - Ax$ ;  
 $\text{iter}=0$ ;
2.  $m = 0$ ;  $\text{rest}=0$ ;  
 $v_1 = r/\|r\|_2$ ;  
 $c_1 = \|r\|_2$ ;  
 for  $i = 2, \dots, M+1$  do  
 $c_i = 0$
3.  $m = m + 1$ ;  $\text{iter}=\text{iter}+1$ ;  
 $v_{m+1} = Av_m$ ;  
 $\text{BASIS}(m, N, h_{-,m}, V_{m+1})$  を呼ぶ;  
 for  $i = m+2, \dots, M+1$  do  
 $h_{i,m} = 0$   
 $\overline{H}_m = Q_m \overline{G}_m$  と QR 分解する;  
 $\bar{c} = Q_m^H \bar{c}$ ;  
 if  $(|c_{m+1}| < \text{tol}\|b\|_2)$  then  
 $\text{UPDATE}(m, N, x, G_m, c, V_m)$  を呼ぶ;  
 return  
 end if  
 if  $(m < M)$  3へ進む;
4. if  $(\text{rest} > 0)$  then  
 for  $i = 1, \dots, K$  do  
 $c_i = 0$   
 end if  
 $\text{UPDATE}(M, N, x, G_M, c, V_M)$  を呼ぶ;  
 $\bar{c} = Q_M c_{M+1} e_{M+1}$ ;  
 if  $(K = 0)$  2へ進む;  
 if  $(|c_{M+1}| = 0)$  2へ進む;
5.  $G_M = H_M - \frac{h_{M+1,M}}{c_{M+1}} c e_M^H$ ;

QR法により  $G$  の固有値および固有ベクトル  $(\theta_1, q_1), \dots, (\theta_M, q_M)$  を求める;  
 $(\theta_1, q_1), \dots, (\theta_M, q_M)$  を並び替えて,  $|\theta_1| \leq \dots \leq |\theta_M|$  となるようにする;

6.  $(q_1, \dots, q_K) = G_K R_K$  とQR分解する;  
 BASIS( $K, M+1, \bar{c}, \bar{G}_{K+1}$ ) を呼ぶ;  
 for  $i = K+2, \dots, M+1$  do  
    $c_i = 0$   
    $\bar{H}_K^{\text{new}} = \bar{G}_{K+1}^H \bar{H}_M G_K; V_{K+1}^{\text{new}} = V_{M+1} \bar{G}_{K+1};$   
    $\bar{H}_K = \bar{H}_K^{\text{new}}; V_{K+1} = V_{K+1}^{\text{new}};$   
   for  $j = 1, \dots, K$  do  
   for  $i = K+2, \dots, M+1$  do  
    $h_{ij} = 0$   
    $m = K; \text{rest} = \text{rest} + 1;$   
   3へ進む

**BASIS**( $m, N, h, V_{m+1}$ )  
 for  $i = 1, \dots, m$  do  
    $h_i = (v_{m+1}, v_i);$   
    $v_{m+1} = v_{m+1} - h_i v_i$   
    $h_{m+1} = \|v_{m+1}\|_2;$   
    $v_{m+1} = v_{m+1} / h_{m+1};$   
 return

**UPDATE**( $m, N, x, R_m, c, V_m$ )  
 $c = R_m^{-1} c;$   
 $x = x + V_m c;$   
 return

### 3.3 ベンチマーク計算の結果

ここでは超大型浮体まわりの回折・散乱波浪場に関する境界値問題の解析<sup>50, 48, 49)</sup>にGMRES-DRを適用した結果を表す。

Table 3.1 主要諸元

VLFSの型	semisub	pontoon	hybrid
長さ(m)	1000	2000	3000
幅(m)	400	400	400
喫水(m)	12.0	1.5	12.0 & 1.5
柱の直径(m)	8.0	—	8.0
柱の数	1000	—	1000
柱間の距離(m)	20.0	—	20.0
曲げ剛性(kNm)	$1.5 \times 10^8$	$1.5 \times 10^9$	$1.5 \times 10^8$ & $1.5 \times 10^9$
ポアッソン比	0.3	0.3	0.3
水深(m)	20.0	20.0	20.0

解析モデルは、図-3.1に表される、箱形ポンツーンと円筒柱形セミサブを接合したハイブリッド型浮体である。また、その主要諸元を表-3.1に表す。平均自由水面上に $xy$ 平面をとり、 $z$ 軸は鉛直上向きが正の向きとなるように定義する。これに、波振幅 $A$ 、角周波数 $\omega$ の微小振幅波が入射するものとする。入射波方向 $\beta$ を、 $\beta = 0$ の時に $x$ 軸の正の方向から負の方向へ進行する波となり、 $\beta = \pi/2$ の時に $y$ 軸の正の方向から負の方向へ進行する波となるような方向として定義する。

流体を非粘性、非圧縮性の完全流体とし、流体運動を非回転的とすると、全ての流体運動は速度ポテンシャル $\Phi$ で表現することができる。また、流体運動、浮体運動いずれも定常的な角周波数 $\omega$ の調和振動を行っているものとする。このとき、全ての時間依存項について、以下のように表す。

$$\Phi(x, y, z, t) = \text{Re}[\phi(x, y, z)e^{i\omega t}] \quad (3.37)$$

ただし、 $i$ は虚数単位を、 $t$ は時間を表す。

流体運動、浮体運動はいずれも微小であるとし、流体運動については微小振幅波理論が、浮体運動については線形弾性理論が適用できるものとする。この前提のもと



で、本研究で扱う問題を、速度ポテンシャル $\phi$ に関する境界値問題として定式化する。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = K \phi \quad \text{on } S_F \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } B_0 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = i\omega n_z(\xi)v(\xi) \quad \text{on } S_H \quad (3.41)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial(\phi - \phi_I)}{\partial r} - ik(\phi - \phi_I) \right) = 0 \quad \text{on } S_\infty \quad (3.42)$$

$$\phi_I = i \frac{gA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} e^{ik(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (3.43)$$

ここで、 $\phi_I$ は入射波ポテンシャルである。また、 $\Omega$ は流体領域を、 $S_F$ は自由水面を、 $B_0$ はベースとなる $z = -h$ の一定水深面を、 $S_H$ は浮体の没水表面を、 $S_\infty$ は無限遠境界を表す。 $K$ は無限水深時波数( $= \omega^2/g$ ;  $g$ は重力加速度)を、 $k$ は波数を表し、次式の分散関係式を満たす。

$$k \tanh kh = K \quad (3.44)$$

また、 $n$ は単位法線ベクトル(流体から外向き方向を正とする)を表す。 $r$ は原点からの水平距離である。

速度ポテンシャル $\phi$ に関する境界条件式を積分方程式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} 4\pi\phi(x) + \int_{S_H} \left\{ \phi(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} - \phi(x) \frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial n_\xi} \right\} d\xi \\ - i\omega \sum_{j=1}^P \zeta_j \int_{S_H} G(x, \xi) f_j(\xi) n_z(\xi) d\xi = 4\pi\phi_I(x) \end{aligned} \quad (3.45)$$

ここで、 $G(x, \xi)$ は水波Green関数、 $f_j(\xi)$ はモード関数、 $\zeta_j$ は複素振幅である。要素としては8節点2次要素を用いる。上式は、 $S_H$ の表面上に配置される $N$ 個の節点における未知ポテンシャル $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ )を未知数とする連立一次方程式に帰着される(50, 48)。節点数は、セミサブ型が $N = 44000$ 、ポンツーン型が $N = 25921$ 、ハイブリッド型が $N = 69921$ である<sup>49)</sup>。

図-3.1の解析モデルにおいて、入射角を $x$ 軸から $\pi/3$ 、入射波長 $\lambda$ を121.21mまたは88.77mとしてベンチマーク解析を行う。

Table 3.2 ポンツーン 入射波長=121.21m

$K$	GMRES-DR(100, $K$ )	GMRES(100 + $K$ )
10	<b>833</b>	1164
20	836	1150
30	849	1097

Table 3.3 ポンツーン 入射波長=88.77m

$K$	GMRES-DR(200, $K$ )	GMRES(200 + $K$ )
20	<b>1578</b>	2353
40	1598	2272
60	1638	2217

表-3.2, 3.3は, ポンツーン部分(節点数  $N = 25921$ ) に対して, 入射波長を 121.21m または 88.77m として GMRES-DR と GMRES の収束回数を比較して表にしたものである. ここで, 生成される Krylov 部分空間の最大の次元はそれぞれ 100, 200 としており,  $K$  は保存する近似固有ベクトルの数である. また, 収束回数は  $\|r\|_2 \leq 10^{-5} \|b\|_2$  が満たされる最小の数とした. リスタートをかけなければ, full-GMRES においてそれぞれ 340, 614 回の反復回数で収束する. 同様にして, 表-3.4 は, ポンツーン部分とセミサブ部分を接合したハイブリッド型(節点数  $N = 69921$ ) に対して, 入射波長を 121.21m として GMRES-DR と GMRES の収束回数を比較して表にしたものである. リスタートをかけなければ, full-GMRES において 426 回の反復回数で収束する.

表-3.5, 3.6 は, GMRES-DR, GMRES, full-GMRES 及び GPBi-CG<sup>55)</sup> を比較した結果である. GPBi-CG はハイブリッド型に対して 428494.9 秒計算を行ったが解に収束しなかった. ここでは full-GMRES は GMRES-DR の約 3 倍の記憶容量を使っている. また, ここでは GPBi-CG は GMRES-DR の約 1/10 の記憶容量しか使っていない.

GMRES-DR の収束特性を図-3.2, 3.3, 3.4 に表す. 水平方向の目盛は反復回数を表し, 垂直方向の目盛は対数スケールでの相対残差ノルムを表す. 実線で描かれているのが GMRES-DR である. 反復はすべて初期値  $x_0 = 0$  から始め, IBM RS/6000SP (CPU POWER3 375MHz) の 1 ノードを使用して倍精度で計算した.

このモデルに対しては  $K$  として  $M$  の 20(%) ぐらいに選べばよいことがわかる. いずれの場合も GMRES-DR( $M, K$ ) では従来の GMRES( $M + K$ ) と比較して, 同程度の記憶

Table 3.4 ハイブリッド 入射波長=121.21m

$K$	GMRES-DR(100, $K$ )	GMRES(100 + $K$ )
10	1694	2576
20	1487	2512
30	<b>1410</b>	2432

Table 3.5 GMRES-DR, GMRES, full-GMRES及びGPBi-CGの収束回数

$\lambda$	pontoon 121.21m	pontoon 88.77m	hybrid 121.21m
GMRES-DR	833	1578	1410
GMRES	1164	2353	2432
full-GMRES	340	614	426
GPBi-CG	1286	3044	

容量でより少ない反復回数で収束していることが分かる.

なお, GMRES-IR<sup>32, 16)</sup>は調和Ritzベクトル群をIRA<sup>44, 17)</sup>を用いて陰的に計算しているため, 探索空間の最大の次元 $M$ は40より大きく取ると数値的に不安定になる現象が確認された<sup>20)</sup>. GMRES-DR<sup>33)</sup>では調和Ritzベクトル群を直接計算しているため, 記憶容量はGMRES-IRよりおよそ $N \times K$ 増加したが,  $M$ を40より大きく取ることができる. 実際, 本モデルに対して $M$ として500としても, 数値計算誤差の影響をあまり受けず, 残差が反復回数の増加に対して単調に減少することを確認している.

Table 3.6 GMRES-DR, GMRES, full-GMRES及びGPBi-CGの収束までの計算時間(秒)

$\lambda$	pontoon 121.21m	pontoon 88.77m	hybrid 121.21m
GMRES-DR	24596.0	46554.7	148922.9
GMRES	33430.0	68482.1	254808.8
full-GMRES	10125.7	21536.2	45225.2
GPBi-CG	37363.2	88414.1	—

### 3.4 第3章のまとめ

ここでは、本章の内容を箇条書きで簡単にまとめる。

1. 原論文<sup>33)</sup>では必ずしも陽な形で与えられていないGMRES-DRのアルゴリズムを陽な形で与え、詳しく記述した。
2. 超大型浮体まわりの回折・散乱波浪場に関する境界値問題の解析にGMRES-DRを適用して、その収束性に関するベンチマーク計算結果を行い、本方法の有効性を実証した。
3. この問題に対しては、探索空間の最大の次元 $M$ が100または200のとき、保存するベクトルの数 $K$ として $M$ の20(%)ぐらいに選べば、従来のGMRES( $M + K$ )より速く解に収束することが分かった。
4. GMRES-IR<sup>32)</sup>において $M$ を40より大きく取ると数値的に不安定になる現象が確認された<sup>20)</sup>が、本モデルに対しては、GMRES-DRでは $M$ を500としても、正常に動作することを確認した。

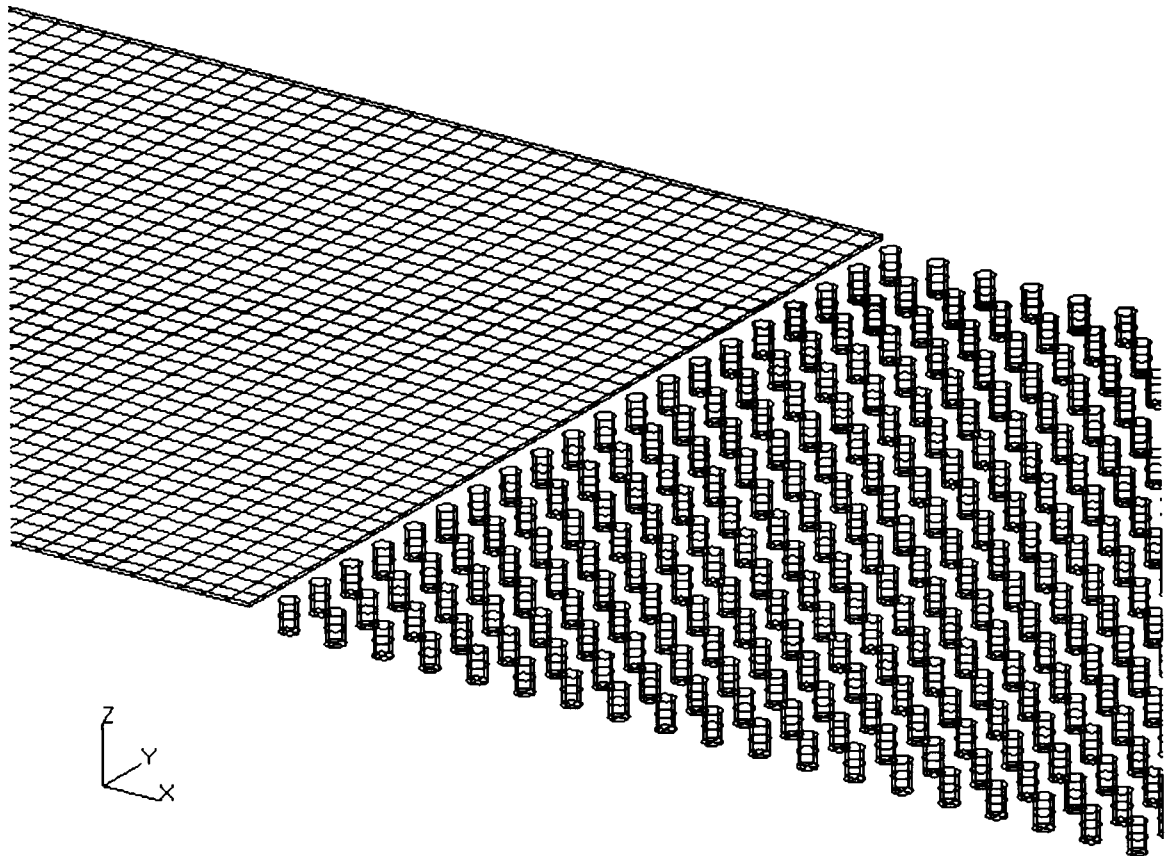


Fig. 3.1 ハイブリッド型浮体

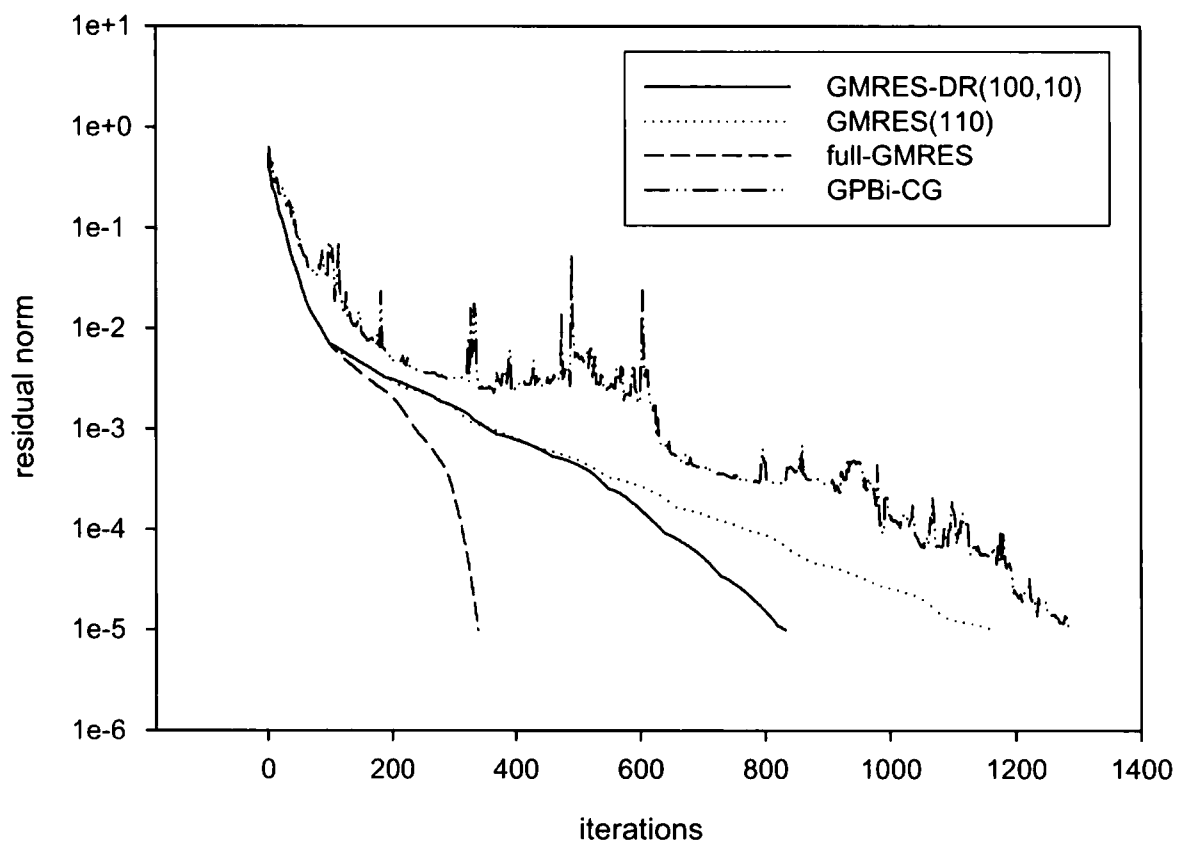


Fig. 3.2 ポンツーン 入射波長=121.21m

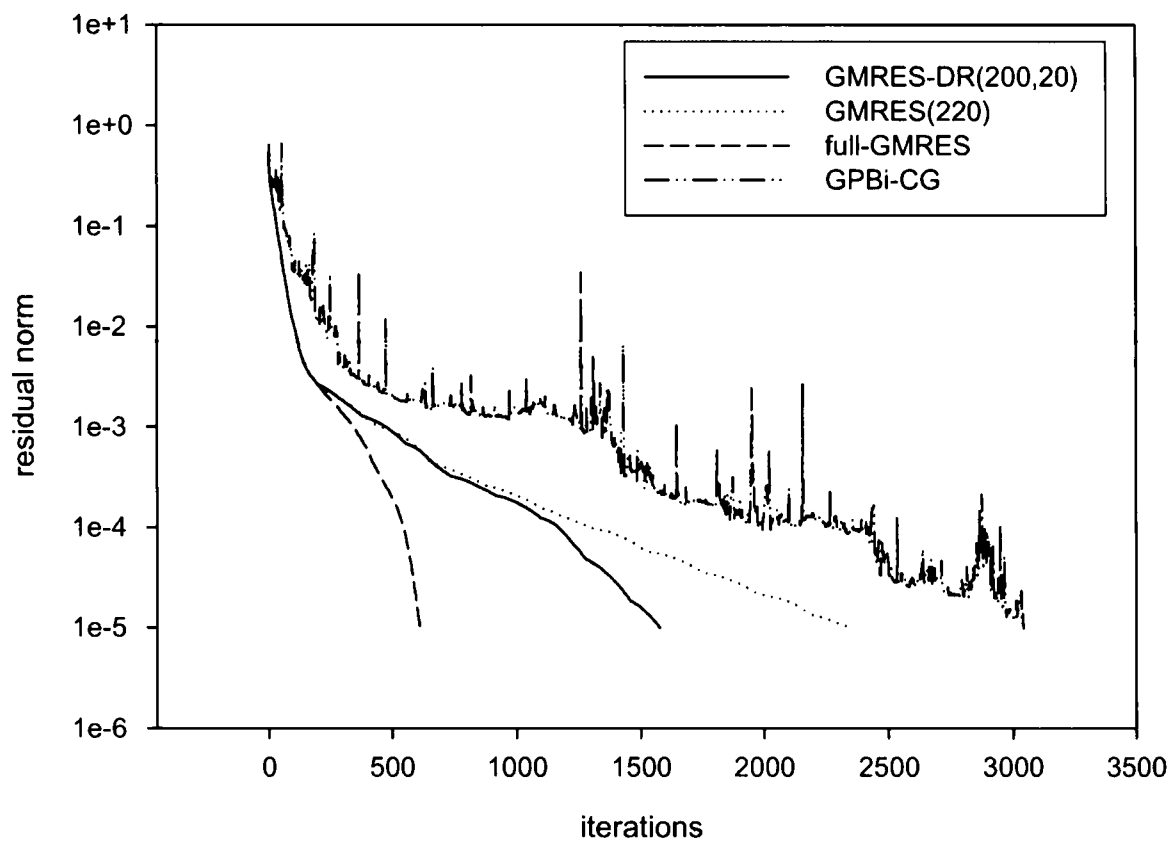


Fig. 3.3 ポンツーン 入射波長=88.77m

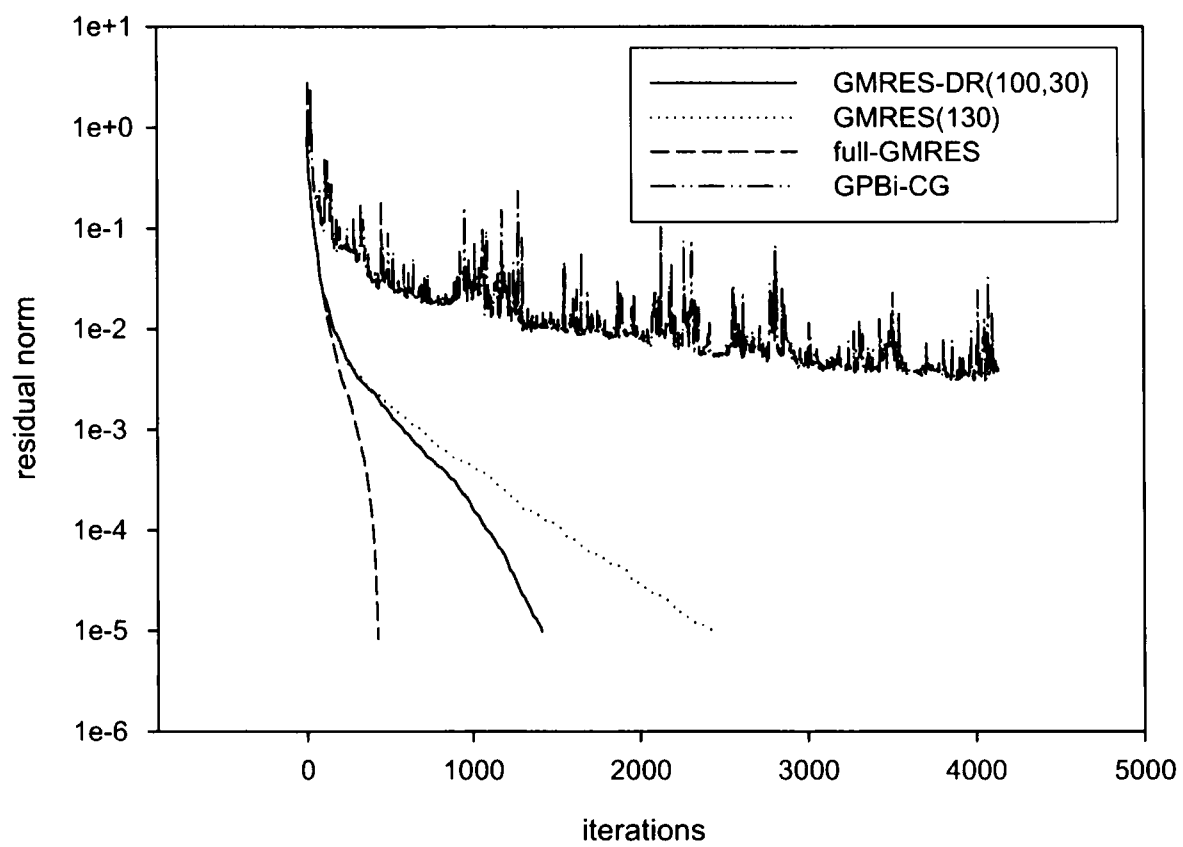


Fig. 3.4 ハイブリッド 入射波長=121.21m



## 第4章 波浪回折問題のための境界要素法への ILUCの適用

### 4.1 はじめに

超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題の解析において、外部領域が非有界で境界条件が単純でないことから、流体に対しては境界要素法(BEM)が、構造物に対しては有限要素法(FEM)が適しており、流体と構造物の境界における速度の法線成分の連続性により両手法が結合される<sup>1, 49)</sup>。最終的には、非Hermiteかつ密行列を係数とする大規模連立一次方程式

$$Ax = b \tag{4.1}$$

を解くことに帰着する。

大規模かつ非Hermite行列に対する反復法として、the generalized minimal residual method (GMRES)<sup>41, 52, 53)</sup>がよく知られている。

本研究における積分作用素のスペクトルは、入射波長を短くしていくとともに、広がっていく傾向にある。また、反復法の収束率は係数行列のスペクトルに強く依存しており<sup>36, 19)</sup>、そのスペクトルが広がっている場合、収束は悪化する。与えられた連立一次方程式を、より好ましい固有値分布を持った連立一次方程式に変換しようと試みる方法として前処理という手法がある。大規模疎行列に対する前処理として、the dual threshold incomplete LU factorization (ILUT)<sup>40)</sup>が、ILUTよりもさらに高速に前処理行列を作成するthe Crout version of the incomplete LU factorization (ILUC)<sup>18)</sup>が開発されている。

本章では、境界要素法により得られる大規模密行列に対して、大規模疎行列に対する前処理としてよく知られているILUTとILUCを適用し、両手法の大規模密行列への適用性に関する比較、検討を行う。

## 4.2 前処理について

反復解法に前処理を施すことにより、より効率的に近似解を求められることがある。ここでは、前処理として不完全LU分解(ILU)<sup>29, 40, 18)</sup>を考え、この方法が直接法と反復法の間間的な手法であるという観点で記述する。

### 4.2.1 反復改良

連立一次方程式を消去法(LU分解)<sup>35)</sup>により数値的に解くことを考える。通常のLU分解を実行したとき、その計算過程で非常に小さい数や非常に大きい数が現れることがある。また、計算過程で現れる数が厳密計算では0であるが丸め誤差の影響を受けて非常に小さい数が現れたりすることもある。そのような数に対して演算を実行すると解の精度に悪い影響を与える。解を安定に求める方法として、計算過程で現れる数が倍精度計算において例えば $10^{-12}$ より小さいとき、それを0とみなしてLU分解を実行することにより近似解を求め、その後その近似解に対してGMRESなどの反復法を用いて解を求める。これをここでは反復改良と呼ぶことにする<sup>35, 56)</sup>。計算時間においても、通常のLU分解より速く解が求まることが多い。

### 4.2.2 ILU

連立一次方程式 $Ax = b$ をGMRESなどの反復法により数値的に解くことを考える。反復回数が非常に多くなる問題もあり、この場合制限された時間内に解が求められないことがある。また、その残差が適当な停止基準を時間内に満たすことができたとしても、計算量が多いため丸め誤差の影響を受けて求めたい精度の解が得られないときもある。そこで、反復回数を大幅に減らす可能性がある方法の一つとして、前処理がある。ここでは前処理としてILUを考える。

計算過程で現れる数が適当に与えた正の数 $\tau$ より小さいとき、それを0とみなしてLU分解を実行し、 $M = LU$ とおく。 $M$ は前処理行列と呼ばれている。左前処理と呼ばれる、

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b \quad (4.2)$$

または右前処理と呼ばれる,

$$AM^{-1}y = b; x = M^{-1}y \quad (4.3)$$

として,  $M^{-1}A$  または  $AM^{-1}$  に対して GMRES を実行することにより解を求める.  $\tau$  を小さくしていけば,  $M^{-1}A$  または  $AM^{-1}$  のスペクトルは 1 の近くに集まり, 次の不等式<sup>36)</sup>から反復回数が減少することが期待される.

$$\frac{\|r_m\|_2}{\|r_0\|_2} \leq \frac{L}{2\pi\epsilon} \inf_{\substack{p_m \in P_m \\ p_m(0)=1}} \|p_m\|_{\Lambda_\epsilon} \quad (4.4)$$

ただし,  $\epsilon$  は適当に与えた正数であり,  $\Lambda_\epsilon$  は  $M^{-1}A$  または  $AM^{-1}$  の  $\epsilon$ -pseudospectrum<sup>36)</sup> 全体,  $L$  は  $\Lambda_\epsilon$  の境界の長さ,  $P_m$  は  $m$  次多項式全体,  $r_m$  は GMRES による近似解  $x_m$  の残差である.

しかし,  $M$  の作成時間や, その保存のためのメモリは増加する. したがって, 前処理行列の作成時間があまりかからないように, 同時に反復回数が減少するように  $\tau$  を適切に選ぶ必要がある. また, 適切な  $\tau$  が存在しない場合もある.

ここで,  $\tau$  が  $10^{-12}$  のときは前処理と反復改良は同じものとなる.

前処理は, 例えば有限要素法 (FEM)<sup>45)</sup> などにより得られた疎行列を係数とする連立一次方程式に対する適用がほとんどであり, この場合  $\tau$  を小さく選んでも前処理行列の作成時間はほとんどかからないことが多い.

#### 4.2.3 密行列への適用

連立一次方程式の係数行列が密である場合, 前処理の適用は困難となる.

ここでは ILUC を密行列に対して適用し, その有効性について検討する.

## 4.3 ILUTとその問題点

前処理において一般的な手法として, the dual threshold incomplete LU factorization (ILUT)<sup>40)</sup>がよく知られている. ここではILUTのアルゴリズムを記述することにより, ILUTの問題点を明らかにする.

### 4.3.1 LU分解

LU分解の実行には数種類の変形がある. break downを避けるために, また数値的に安定な解を求めるために, LU分解において枢軸選択<sup>35)</sup>が必要であるが, ILUにおいて枢軸選択を行うと前処理行列作成に必要な計算時間が増加するため効果が現れない時がある. ここでは枢軸選択を考えないことにする.

係数行列が狭義優対角行列や正定値行列のときは枢軸選択を行わなくても, break downは起こらない.

通常のLU分解は, 次のKIJ versionである. このversionのILUへの適用に関する利点は,  $L$ の成分と $U$ の成分を対称に生成することである. これは,  $L$ と $U$ の0でない成分を少なくしても, すなわち $\tau$ が大きくても,  $M = LU$ は $A$ をよく近似することにつながる(このことは, あとで詳しく記述する). しかし,  $S$ の保存に多くのメモリを必要とするためILUへの適用は困難である.

ここで,  $\hat{d}_k$ は $\hat{U}$ の $k$ 番目の対角成分である.

#### KIJ version

$S = A$

do  $k = 1, \dots, n$

$\hat{d}_k = s_{kk}$

do  $i = k + 1, \dots, n$

$\hat{u}_{ki} = s_{ki}; \hat{l}_{ik} = s_{ik}/\hat{d}_k$

do  $j = k + 1, \dots, n$

$s_{ij} = s_{ij} - \hat{l}_{ik}s_{kj}$

end do

end do

end do

KIJ versionにおいて, K-loopとI-loopを入れ替えると, 次のIKJ versionが得られる. このversionからILUTが導かれる.

#### IKJ version

```
do  $i = 1, \dots, n$ 
  do  $k = 1, \dots, i - 1$ 
     $\hat{l}_{ik} = a_{ik} / \hat{d}_k$ 
    do  $j = k + 1, \dots, n$ 
       $a_{ij} = a_{ij} - \hat{l}_{ik} \hat{u}_{kj}$ 
    end do
  end do
   $\hat{d}_i = a_{ii}$ 
  do  $j = i + 1, \dots, n$ 
     $\hat{u}_{ij} = a_{ij}$ 
  end do
end do
```

また, loopを適当に入れ替えることによって, JKI versionも得られる. このversionからもILUTが得られる.

### 4.3.2 ILUTのアルゴリズム

LU分解の計算過程において, 適当に与えられた正の数 $\tau$ より小さい数を棄却することにより, ILUTが得られる. 実行の容易さから, IKJ versionまたはJKI versionが選ばれる. 疎行列 $L$ および $U$ はIKJ versionのときは共に圧縮行格納法(CRS)<sup>3)</sup>により, JKI versionのときは共に圧縮列格納法(CCS)<sup>3)</sup>により格納される.

ここで,  $d_k$ は $U$ の $k$ 番目の対角成分である.

#### ILUT (IKJ version)

```
do  $i = 1, \dots, n$ 
  do  $j = 1, \dots, n$ 
```

```

         $w_j = a_{ij}$ 
    end do
    do  $k = 1, \dots, i - 1$ 
         $w_k = w_k / d_k$ 
        if  $(|w_k| \geq \tau)$  then
             $l_{ik} = w_k$ 
        end if
        do  $j = k + 1, \dots, n; u_{kj} \neq 0$ 
             $w_j = w_j - w_k u_{kj}$ 
        end do
    end do
     $d_i = w_i$ 
    do  $j = i + 1, \dots, n$ 
        if  $(|w_j| \geq \tau)$  then
             $u_{ij} = w_j$ 
        end if
    end do
end do

```

### 4.3.3 ILUTの問題点

ILUTのIKJ versionは上の行から下の行へと各行ごとに $L$ の成分と $U$ の成分が生成される。したがって、上の方の行から生成された成分の近似はよいが、下の方の行から生成された成分の近似はあまりよくない。すなわち、ILUTにより得られた疎行列 $U$ はLU分解により得られる上三角行列 $\hat{U}$ をよく近似するが、 $L$ は $\hat{L}$ をあまり近似しないことを意味する。このため、 $L$ の成分による影響が、 $U$ のそれと比較して、あまり出ないように、 $L$ の成分の生成に関する“if  $(|w_j| \geq \tau)$  then”の $w_j$ において、 $d_j$ で割る前の $w_j$ に対してではなく $d_j$ で割った後の $w_j$ に対して、ifにより判断するように工夫されている。 $L$ が $\hat{L}$ を近似するためには、 $\tau$ を十分小さく選ぶ必要がある。このため $L, U$ の0でない成分の数は共に大きくなり、係数行列 $A$ が密のときは、前処理行列の作成に時間がかかる。同様にILUTのJKI versionは $L$ は $\hat{L}$ を近似するが、 $U$ は $\hat{U}$ をあまり近似しないこ

とが起こる。

## 4.4 ILUCとその実行

LU分解におけるIKJ versionとJKI versionを組み合わせることにより, Crout versionが得られる. このversionをILUへ適用したものは, the Crout version of the incomplete LU factorization (ILUC)<sup>18)</sup>と呼ばれている. ILUCは,  $U$ は $\hat{U}$ を $L$ は $\hat{L}$ を, ILUTと比較して共によく近似するため, 疎行列に対してはもちろんのこと, 密行列に対しても効果的となる可能性がある.

### 4.4.1 ILUCのアルゴリズム

ILUCのアルゴリズムは以下のとおりである. Crout versionによる $L$ の成分と $U$ の成分の生成順序は, KIJ versionと同じであるので, ILUTのように $L$ 部分または $U$ 部分のどちらかに偏ることなく,  $L$ は $\hat{L}$ を $U$ は $\hat{U}$ を共に近似する. ここではbreak downを避けるために,  $U$ の対角成分 $d_k$ がマシンイプシロン $\epsilon_{\text{ps}}$ より小さいときは $10^{-3}$ で置き換えることにする.

#### ILUC

```
do  $k = 1, \dots, n$ 
  do  $j = k, \dots, n$ 
     $z_j = a_{kj}$ 
  end do
  do  $i = 1, \dots, k-1; l_{ki} \neq 0$ 
    do  $j = k, \dots, n; u_{ij} \neq 0$ 
       $z_j = z_j - l_{ki}u_{ij}$ 
    end do
  end do
  do  $j = k+1, \dots, n$ 
     $w_j = a_{jk}$ 
  end do
  do  $i = 1, \dots, k-1; u_{ik} \neq 0$ 
    do  $j = k+1, \dots, n; l_{ji} \neq 0$ 
       $w_j = w_j - l_{ji}u_{ik}$ 
```



```

        end do
    end do
    if ( $|z_k| < \text{eps}$ ) then
         $z_k = 10^{-3}$ 
    end if
     $d_k = z_k$ 
    do  $j = k + 1, \dots, n$ 
        if ( $|z_j| \geq \tau$ ) then
             $u_{kj} = z_j$ 
        end if
    end do
    do  $j = k + 1, \dots, n$ 
        if ( $|w_j| \geq \tau$ ) then
             $l_{jk} = w_j/d_k$ 
        end if
    end do
end do

```

#### 4.4.2 $L$ と $U$ の格納について

$U$ は疎行列でありまたその生成順序から,  $U$ の行中の0でない要素を連続したメモリ上に配置するCRS<sup>3)</sup>により格納する.  $U$ の0でない成分の数をnzuとすると,  $U$ の0でない成分を格納する複素数配列 $U(\text{nzu})$ , その列番号を格納する整数配列 $JU(\text{nzu})$  および各行の開始位置を格納する整数配列 $IU(n+1)$ を用いると,  $k$  stepにおいて次のようになる. ただし,  $IU(1) = 1, IU(n+1) = \text{nzu} + 1$ とする.

```

 $q = IU(k)$ 
do  $j = k + 1, \dots, n$ 
    if ( $|z_j| \geq \text{tol}$ ) then
         $U(q) = z_j$ 
         $JU(q) = j$ 
         $q = q + 1$ 
    end if
end do

```

```

    end if
  end do
   $IU(k+1) = q$ 

```

同様に,  $L$ は疎行列でありまたその生成順序から,  $L$ の列中の0でない要素を連続したメモリ上に配置するCCS<sup>3)</sup>により格納する.  $L$ の0でない成分の数をnzlとすると, 複素数配列  $L(\text{nzl})$ , 整数配列  $IL(\text{nzl})$  および整数配列  $JL(n+1)$  が用いられる.

#### 4.4.3 ILUCの詳細

疎行列  $L, U$  の格納方法から次の2点が問題になる.

1. “do  $j = k, \dots, n; u_{ij} \neq 0$ ”
2. “do  $i = 1, \dots, k-1; l_{ki} \neq 0$ ”

1に関して,  $k$  stepにおいて, 整数  $U\text{first}(i)$  ( $i = 1, \dots, k-1$ ) に,  $i$  行の  $k$  番目以降である  $u_{ik}, \dots, u_{in}$  の配列  $U(*)$  における開始位置を格納する.  $U\text{first}$  は各 step ごとに更新される.

2に関して, linked list 18) により,  $l_{k1}, \dots, l_{k,k-1}$  の列番号を指定する. すなわち,  $L\text{list}(k)$  には,  $l_{k1}, \dots, l_{k,k-1}$  において0でないもののうち列番号が最も小さいものが格納され,  $L\text{list}(L\text{list}(k))$  にはその次に小さい列番号が格納される.

詳しくは,  $k$  stepにおいて次のようになる. ここで,  $L\text{end}$  は  $l_{k1}, \dots, l_{k,k-1}$  のうち0でないものの個数である.

```

 $m = k$ 
 $L\text{end} = 0$ 
do  $i = 1, \dots, k-1$ 
   $p = L\text{first}(i)$ 
  if  $((p \leq JL(i+1) - 1) \wedge (IL(p) = k))$  then
     $L\text{list}(m) = i$ 
     $m = i$ 
  end if
end do

```

```

         $Lend = Lend + 1$ 
    end if
end do
 $i = k$ 
do  $m = 1, \dots, Lend$ 
     $i = Llist(i)$ 
     $p = Lfirst(i)$ 
    do  $q = Ufirst(i), \dots, IU(i + 1) - 1$ 
         $j = JU(q)$ 
         $z_j = z_j - L(p) * U(q)$ 
    end do
     $Lfirst(i) = p + 1$ 
end do
 $Lfirst(k) = JL(k)$ 

```

## 4.5 ベンチマーク計算結果

ここでは超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題の解析<sup>49, 50, 48)</sup>に ILUC-GMRESを適用し, そのベンチマーク計算結果を表す.

Table 4.1 主要諸元

VLFSの型	pontoon
長さ (m)	2000
幅 (m)	400
喫水 (m)	1.5
水深 (m)	20.0

解析モデルは, 一定水深の無限海域に設置される箱形ポンツーン浮体である. また, その主要諸元を表-4.1に表す. 平均自由水面上に  $xy$  平面をとり,  $z$  軸は鉛直上向きが正の向きとなるように定義する. これに, 波振幅  $A$ , 角周波数  $\omega$  の微小振幅波が入射するものとする. 入射波方向  $\beta$  を,  $\beta = 0$  の時に  $x$  軸の正の方向から負の方向へ進行する波となり,  $\beta = \pi/2$  の時に  $y$  軸の正の方向から負の方向へ進行する波となるような方向として定義する.

流体を非粘性, 非圧縮性の完全流体とし, 流体運動を非回転的とするとき, 全ての流体運動は速度ポテンシャル  $\Phi$  で表現することができる. また, 流体運動, 浮体運動いずれも定常的な角周波数  $\omega$  の調和振動を行っているものとする. このとき, 全ての時間依存項について, 以下のように表す.

$$\Phi(x, y, z, t) = \text{Re}[\phi(x, y, z)e^{i\omega t}] \quad (4.5)$$

ただし,  $i$  は虚数単位を,  $t$  は時間を表す.

流体運動は微小であるとし, 微小振幅波理論が適用できるものとする. この前提のもとで, 本研究で扱う問題を, 速度ポテンシャル  $\phi$  に関する境界値問題として定式化

する.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = K \phi \quad \text{on } S_F \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } B_0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_H \quad (4.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial(\phi - \phi_I)}{\partial r} - ik(\phi - \phi_I) \right) = 0 \quad \text{on } S_\infty \quad (4.10)$$

$$\phi_I = i \frac{gA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} e^{ik(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (4.11)$$

ここで,  $\phi_I$  は入射波ポテンシャルである. また,  $\Omega$  は流体領域を,  $S_F$  は自由水面を,  $B_0$  はベースとなる  $z = -h$  の一定水深面を,  $S_H$  は浮体の没水表面を,  $S_\infty$  は無限遠境界を表す.  $K$  は無限水深時波数 ( $= \omega^2/g$ ;  $g$  は重力加速度) を,  $k$  は波数を表し, 次式の分散関係式を満たす.

$$k \tanh kh = K \quad (4.12)$$

また,  $n$  は単位法線ベクトル (流体から外向き方向を正とする) を表す.  $r$  は原点からの水平距離である.

速度ポテンシャル  $\phi$  に関する境界条件式を積分方程式に代入すると次式が得られる.

$$4\pi\phi(x) + \int_{S_H} \left\{ \phi(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} - \phi(x) \frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial n_\xi} \right\} d\xi = 4\pi\phi_I(x) \quad (4.13)$$

ここで,  $G(x, \xi)$  は水波 Green 関数である. 要素としては 8 節点 2 次要素および 4 節点 1 次要素を用いる. 上式は,  $S_H$  の表面上に配置される  $N$  個の節点における未知ポテンシャル  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を未知数とする連立一次方程式に帰着される<sup>50, 48)</sup>. 要素分割はボンツーン型浮体の没水表面に関して行う. 8 節点 2 次要素の場合は, 底面を  $10\text{m} \times 10\text{m}$  のパネルで, 側面を  $10\text{m} \times 1.5\text{m}$  のパネルで分割し, 要素数 8480, 節点数 25921 である. 4 節点 1 次要素の場合は, 底面を  $5\text{m} \times 5\text{m}$  のパネルで, 側面を  $5\text{m} \times 1.5\text{m}$  のパネルで分割し, 要素数 32960, 節点数 33441 とした場合 (分割 A) と底面を  $4\text{m} \times 4\text{m}$  のパネルで, 側面を  $4\text{m} \times 1.5\text{m}$  のパネルで分割し, 要素数 51200, 節点数 51801 とした場合 (分割 B) の 2 種類とした.

それぞれの解析モデルにおいて、入射角を $x$ 軸から $\pi/3$ , 入射波長 $\lambda$ を, 8節点2次要素の場合は197.492m, 152.328m, 105.187mまたは55.034mとして, 4節点1次要素の場合は197.492m(分割Aのみ)または55.034m(分割A及びB)としてベンチマーク解析を行う。

#### 4.5.1 8節点2次要素の場合

ここでは高速多重極展開法(FMM)<sup>10, 50)</sup>を適用せず, 係数行列 $A$ を保存して, ILUCによる前処理行列を作成する方法をとる。

図-4.1, 4.2, 4.3, 4.4は, 浮体底面( $z = -1.5$ )の $x$ 軸上における圧力分布 $p(x, 0, -1.5)$ を図にしたものである。また, 前処理を適用した場合と適用しなかった場合とで圧力分布がほぼ完全に一致することを確認している。

Table 4.2  $\tau$ を変化させたときのILUCとILUTの計算結果.  $\lambda = 197.492\text{m}$ ,  $N = 25921$ .

$\tau$	ILUC					ILUT				
	Ratio	Its	PreSec	ItSec	TotSec	Ratio	Its	PreSec	ItSec	TotSec
$\infty$	0.0	140	0	1400	1400	0.0	140	0	1400	1400
1.0	0.00009	143	100	1519	1619	0.00007	137	147	1230	1377
0.1	0.008	84	214	1263	1477	0.0001	172	692	1461	2153
0.08	0.019	58	289	879	1168					
0.06	0.061	35	462	344	806	0.0089	—	2097		—
0.04	0.187	19	3502	244	3746	0.0089	—	2239		
0.02						0.145	53	18951	550	19501
0.01						0.268	29	31061	300	31361

表-4.2, 4.3, 4.4, 4.5はそれぞれ, 入射波長 $\lambda$ を197.492m, 152.328m, 105.187mまたは55.034mとしてILUC-GMRESとILUT-GMRESを比較して表にしたものである。反復はすべて初期値 $x_0 = 0$ から始め, 京都大学学術情報メディアセンターのスーパーコンピュータHPC2500において倍精度でスレッド並列計算(32CPU)をした。ここで,  $\tau$ は適当に選んだ正の数であり, LU分解の計算過程においてその値より小さい数は0とみなされる。 $\tau$ が $\infty$ の時は, 前処理を適用しない通常のGMRESに対応している。“Ratio”はILUCまたはILUTにより得られた $L$ と $U$ の0でない成分の個数を係数行列 $A$ の成分の個数( $= N^2$ )で割った比率を, “Its”は反復回数を, “PreSec”は前処理行列の作成時間を, “ItSec”は反復に要した時間を, “TotSec”は全計算時間を表す。“—”は反復回数が1000以内で収束が達成されなかったことを意味する。また, 収束回数は $\|r\|_2 \leq 10^{-5} \|b\|_2$

Table 4.3  $\tau$ を変化させたときのILUCとILUTの計算結果.  $\lambda = 152.328m, N = 25921$ .

$\tau$	ILUC					ILUT				
	Ratio	Its	PreSec	ItSec	TotSec	Ratio	Its	PreSec	ItSec	TotSec
$\infty$	0.0	205	0	2386	2386	0.0	205	0	2386	2386
1.0	0.00019	180	99	1911	2010	0.00011	192	152	1593	1745
0.1	0.050	63	341	553	894	0.0051	225	1730	2019	3749
0.08	0.106	29	1207	346	1553					
0.06						0.0043	—	3091	—	—
0.04						0.0114	—	3976	—	—
0.02						0.207	49	29291	587	29878
0.01						0.354	215	37311	2535	39846

Table 4.4  $\tau$ を変化させたときのILUCとILUTの計算結果.  $\lambda = 105.187m, N = 25921$ .

$\tau$	ILUC					ILUT				
	Ratio	Its	PreSec	ItSec	TotSec	Ratio	Its	PreSec	ItSec	TotSec
$\infty$	0.0	331	0	3242	3242	0.0	331	0	3242	3242
1.0	0.00022	282	83	2332	2415	0.00012	302	171	2921	3092
0.6	0.00058	270	87	2259	2346					
0.4	0.0027	169	105	1415	1520					
0.2	0.047	96	312	835	1147					
0.1	0.239	48	4291	506	4797	0.079	—	16252	—	—
0.06						0.00015	—	962	—	—
0.04						0.199	102	25413	1000	26413
0.02						0.331	—	34825	—	—
0.01						0.634	—	42054	—	—

が満たされる最小の数とした。

表-4.2から、 $\tau$ が0.06のときILUC-GMRESは通常のGMRESより速く解に収束していることが分かる。また、 $\tau$ を0.1より大きく選ぶとILUCは収束回数の低減に寄与していないことも分かる。 $\tau$ が0.1以下の時は、 $\tau$ を小さくしていくと収束回数もほぼ単調に減少している。このとき、必要とする記憶容量がわずかであり、前処理行列の作成にあまり時間がかからないため、ILUCは有効となる。

同様に、表-4.3, 4.4においても、ILUCが有効であることは明らかである。

一方、表-4.5においては、 $\tau$ を0.2より大きく選ぶとILUCは収束回数の低減に寄与していないことが分かる。実際、 $\tau$ が0.4のときは反復回数が1000を超えても収束しな

Table 4.5  $\tau$ を変化させたときのILUCとILUTの計算結果.  $\lambda = 55.034m, N = 25921$ .

$\tau$	ILUC					ILUT				
	Ratio	Its	PreSec	ItSec	TotSec	Ratio	Its	PreSec	ItSec	TotSec
$\infty$	0.0	649	0	6783	6783	0.0	649	0	6783	6783
1.0	0.007	765	144	8094	8238	0.007	—	1185	—	—
0.8	0.025	595	182	5282	5464					
0.6	0.161	—	2690	—	—					
0.4	0.386	—	7870	—	—	0.092	—	12036	—	—
0.2	0.437	298	10519	3397	13916	0.005	—	5547	—	—
0.1	0.519	33	27861	580	28441	0.226	470	36296	6660	42956

かった. また $\tau$ が0.8のとき, 通常のGMRESより速く解に収束しているが, この値から $\tau$ を減少させたとき, 収束回数が単調に減少していない.  $\tau$ を0.2より小さくすると収束回数の大幅な低減が認められるが, 前処理行列の作成に必要な時間が非常にかかるため, この場合にはILUCは有効でないと思われる.

#### 4.5.2 4節点1次要素(分割A)の場合

ここでは高速多重極展開法(FMM)<sup>10, 50)</sup>を適用し, 係数行列 $A$ の成分を保存しないで, ILUCによる前処理行列を作成する方法をとる. このとき, 各 $k$  stepにおいて $A$ の $k$ 行と $k$ 列の一部を計算しながら前処理行列を作成するためその生成に少し時間がかかる. なお, FMMと従来法との比較については, 文献<sup>50, 48)</sup>で述べられており, ここではその比較は省略する.

反復はすべて初期値 $x_0 = 0$ から始め, HPC2500において, 倍精度でスレッド並列計算(8CPU)をした. なお, FMMの並列化においては西村, 宗像<sup>37)</sup>を参照し, 行列-ベクトル積の計算における上向きpass及び下向きpassに対して適用した.

表-4.6から, 係数行列を保存しないアルゴリズムのため, 前処理行列の作成に時間がかかっているが,  $\tau$ の減少とともに収束回数もほぼ単調に減少していることが分かる. 必要とする記憶容量もわずかである.

表-4.7より, 8節点2次要素のときとは違って,  $\tau$ の値が大きくても, 収束回数が急激に増加したりしないことが分かる. また $\tau$ が0.6のとき, ILUC-GMRESは通常のGMRESより速く解に収束しており, 高速多重極展開法の適用で前処理行列の作成に時間がかかっても, ILUCが有効となっている.



Table 4.6 ILUCの計算結果.  $\lambda = 197.492\text{m}$ ,  $N = 33441$ 

$\tau$	Ratio	Its	TotSec
$\infty$	0.0	140	2988
1.0	0.00003	138	5320
0.1	0.00067	123	5009
0.04	0.0102	93	4436
0.02	0.1716	28	8959

Table 4.7 ILUCの計算結果.  $\lambda = 55.034\text{m}$ ,  $N = 33441$ 

$\tau$	Ratio	Its	TotSec
$\infty$	0.0	664	15131
1.0	0.0002	544	15334
0.8	0.0004	475	13705
0.6	0.0012	311	9951
0.4	0.0140	577	16471
0.2	0.1239	309	13867

### 4.5.3 4節点1次要素(分割B)の場合

ここでも高速多重極展開法(FMM)<sup>10, 50)</sup>を適用し, 係数行列 $A$ の成分を保存しないでILUCによる前処理行列を作成する方法をとり, HPC2500において倍精度でスレッド並列計算(8CPU)を行った.

表-4.8より, 分割をより細かくした場合は,  $\tau$ の減少とともに収束回数もほぼ単調に減少しており, 特に $\tau$ が0.3の時には通常のGMRESに対して27%まで減少した. ただし,  $\tau$ が0.2の時は逆に収束回数が増えており, 表-4.5, 4.7の挙動と共にその原因の解明は今後の課題である.

なお, 本論文では収束性の面を主に問題にしてきたが, ILUCはそのアルゴリズムから並列計算に向いていないことが知られている. 現在, 並列計算に向けた前処理として $A$ の逆行列の近似を目的とするthe factored approximate inverse (AINV)<sup>4)</sup>などが提案されているが, 前処理行列の作成時間やその格納方法に問題があり, 現時点ではILUCの方が実用的であると思われる. また, AINVとILUは強く関係していることも

Table 4.8 ILUCの計算結果.  $\lambda = 55.034m$ ,  $N = 51801$ 

$\tau$	Ratio	Its	TotSec
$\infty$	0.0	662	17219
1.0	0.0001	573	21794
0.8	0.0001	558	21429
0.6	0.0003	496	19916
0.4	0.0010	335	15787
0.3	0.0039	182	11908
0.2	0.0299	297	16281

知られている<sup>5)</sup>.

#### 4.5.4 $\tau$ による制御と $p$ による制御について

不完全分解による前処理は,  $\tau$ によって制御されることが多い. これは不完全分解による誤差評価式を比較的容易に導くことができるためであると思われる. しかし, 最適となる $\tau$ の値は問題に依存するため, その設定は困難である.

LU分解の計算過程の各stepにおいて現れる成分のうち絶対値の大きい成分から, 適当に定めた数 $p$ だけ格納する方法<sup>40)</sup>も知られている. ここで扱った問題に関しては,  $p$ により制御を行い,  $p = 0.05 \times N$ と設定した結果と,  $\tau$ により制御を行い, Ratioが0.05となるように設定した結果に大きな違いがないことを確認している.

## 4.6 第4章のまとめ

ここでは, 本章の内容を箇条書きで簡単にまとめる.

1. LU分解から始めて, 不完全LU分解が得られるまでを詳しく論じた.
2. 前処理の適用が困難である密行列に対して, ILUCの適用を試みた.
3. 超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題の解析にILUCを適用したベンチマーク計算を行い, その有効性を確認した.
4. 8節点2次要素のときは, 短波長においてILUCの適用が困難な場合があり, その状況を記述した.
5. 4節点1次要素のときは, ILUCの適用が有効であることを示した.

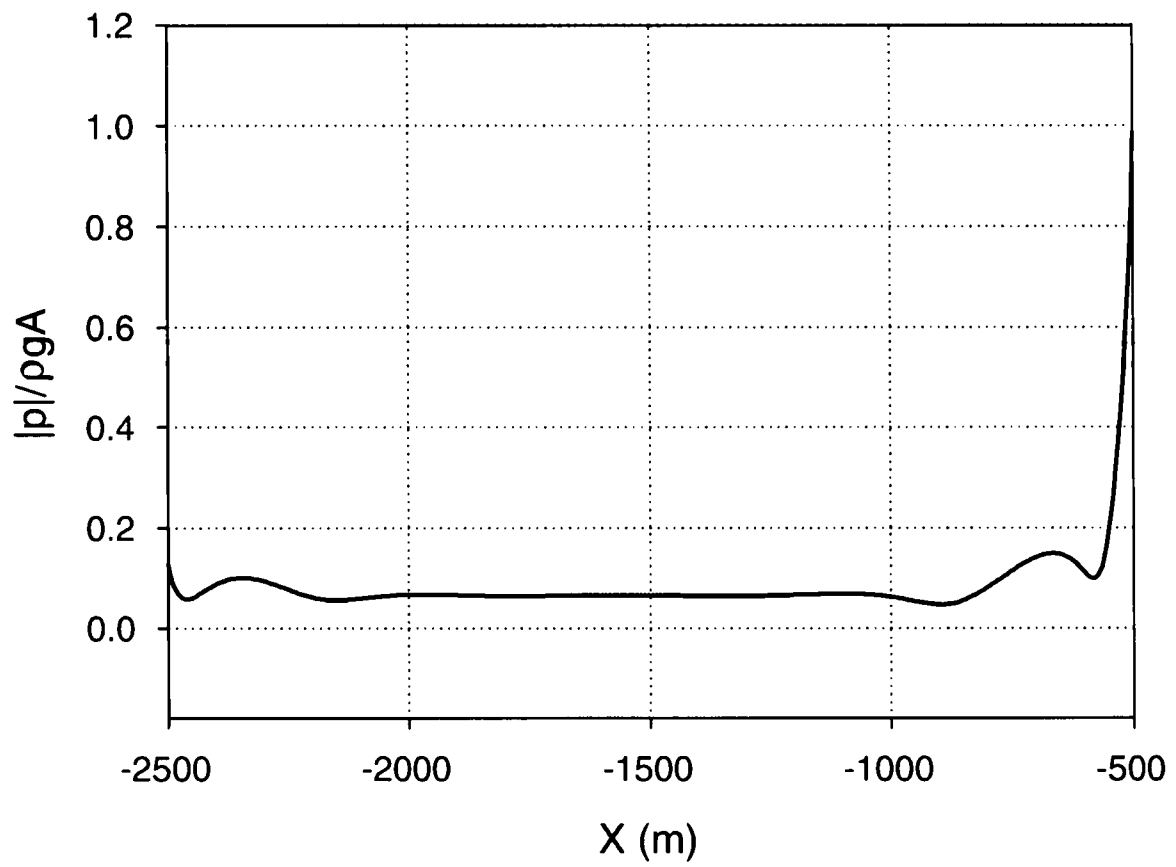


Fig. 4.1 ポンツーン 入射波長=197.492m

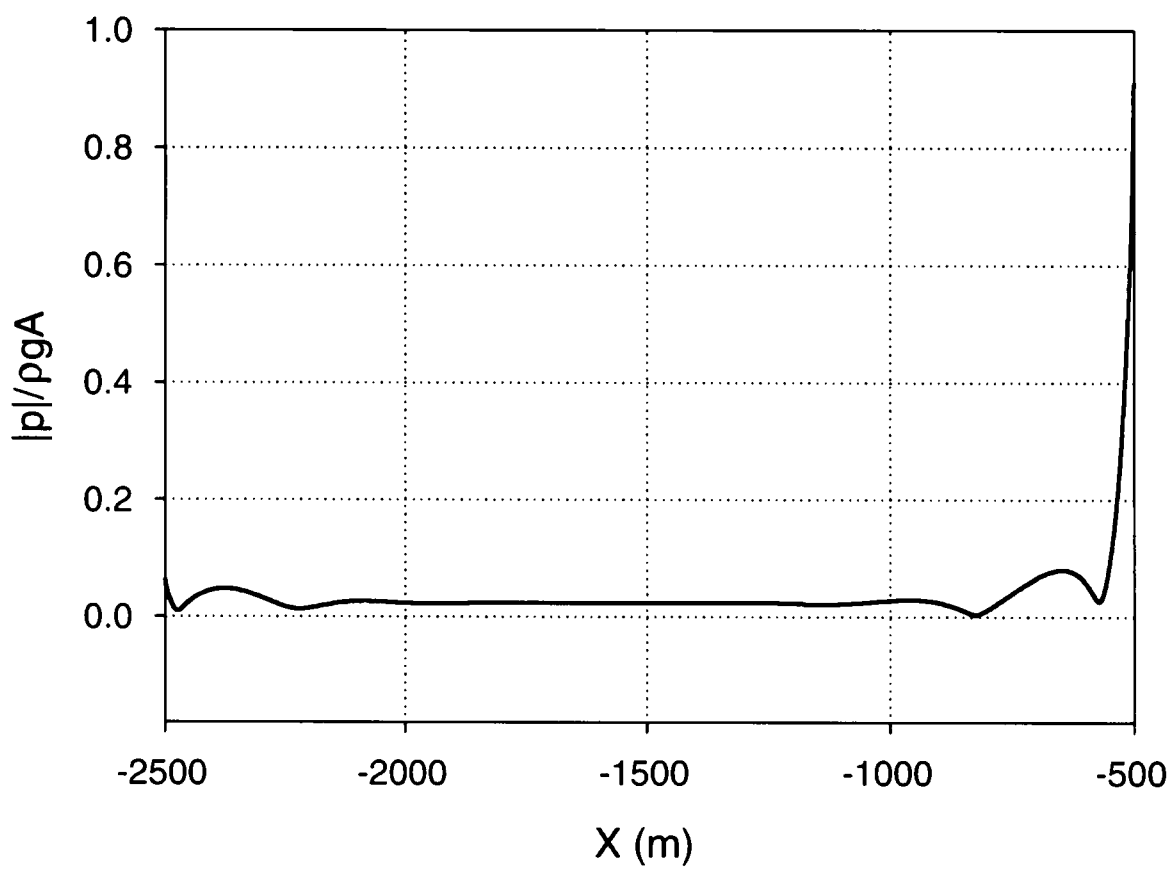


Fig. 4.2 ポンツーン 入射波長=152.328m

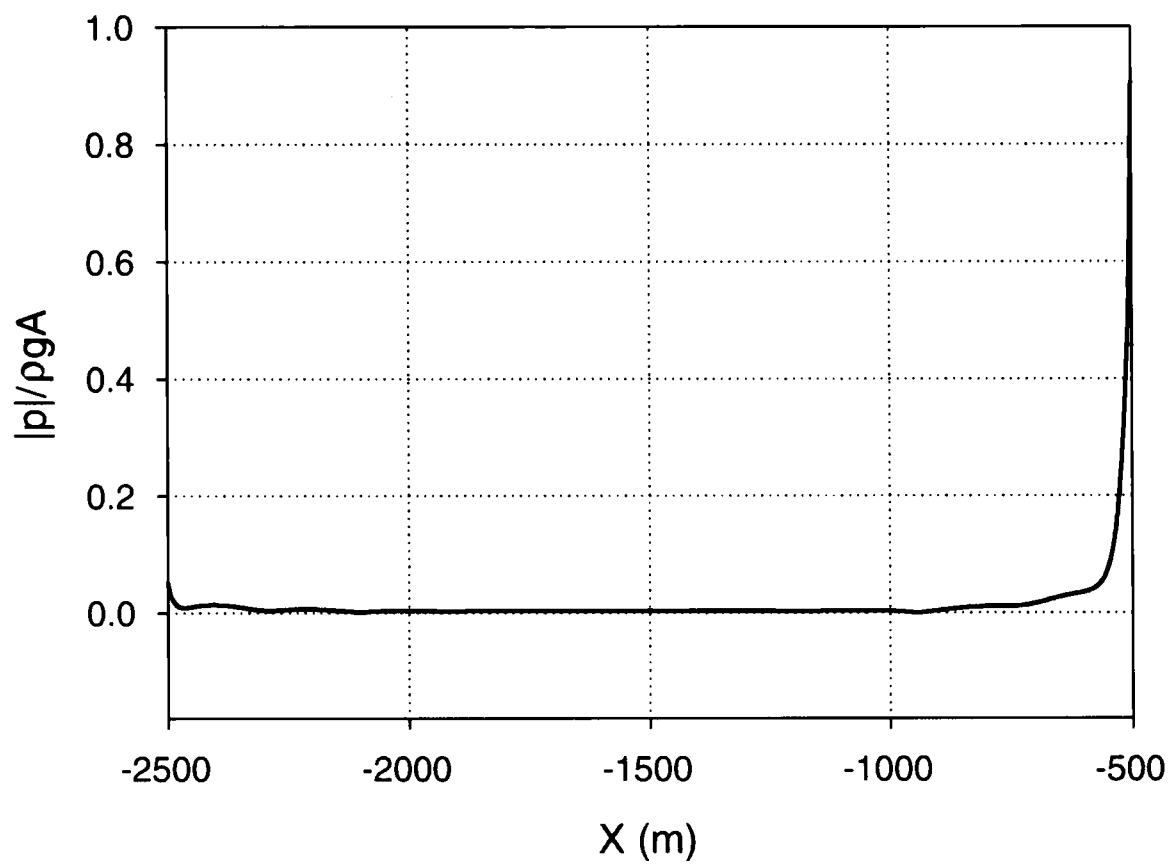


Fig. 4.3 ポンツーン 入射波長=105.187m

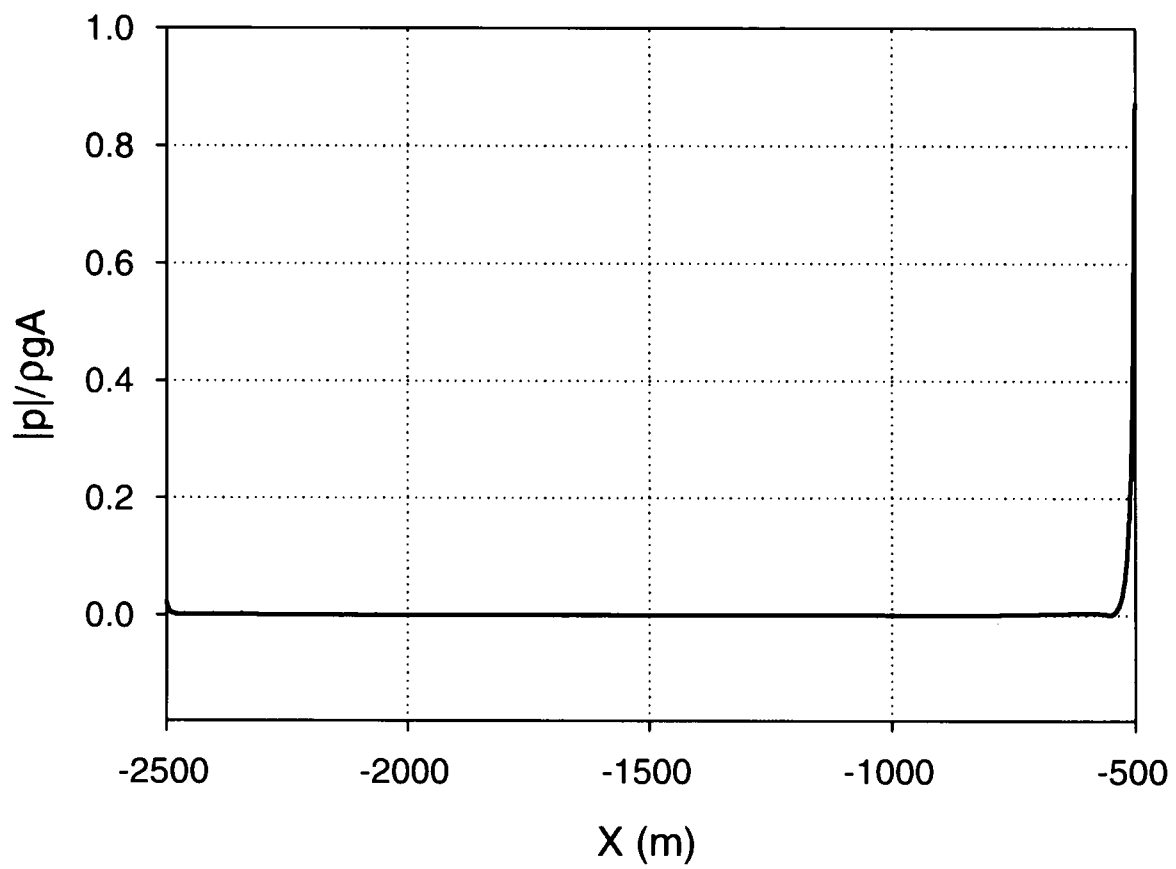


Fig. 4.4 ポンツーン 入射波長=55.034m

## 第5章 超大型浮体の波浪回折問題に対する OSP-ILUCの有効性

### 5.1 はじめに

超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題の解析において、外部領域が非有界で境界条件が単純でないことから、流体に対しては境界要素法(BEM)が、構造物に対しては有限要素法(FEM)が適しており、流体と構造物の境界における速度の法線成分の連続性により両手法が結合される<sup>1, 49)</sup>。最終的には、非Hermiteかつ密行列を係数とする大規模連立一次方程式

$$Ax = b \quad (5.1)$$

を解くことに帰着する。

大規模かつ非Hermite行列に対する反復法として、the generalized minimal residual method (GMRES)<sup>41, 52, 53)</sup>がよく知られている。

本研究における積分作用素のスペクトルは、入射波長を短くしていくとともに、広がっていく傾向にある。また、反復法の収束率は係数行列のスペクトルに強く依存しており<sup>36, 19)</sup>、そのスペクトルが広がっている場合、収束は悪化し前処理を必要とする。大規模疎行列に対する前処理として、the dual threshold incomplete LU factorization (ILUT)<sup>40)</sup>が、ILUTよりもさらに高速に前処理行列を作成するthe Crout version of the incomplete LU factorization (ILUC)<sup>18)</sup>が開発されており、大規模密行列である本問題に対してこれらの手法の適用を試み、その比較も行った<sup>22)</sup>。反復法における行列ベクトル積は、the fast multipole method (FMM)<sup>10, 50)</sup>を用いて近似され、遠方点に対応する行列成分は計算されない。このため、前処理行列の作成に係数行列の全成分を必要とするこの前処理では、収束性は改善されるものの、FMMを用いたとき、前処理行列作成に要する時間もあわせた全計算時間に関しては、これを大きく還元することはできなかった<sup>22)</sup>。

一方、境界要素法から得られた連立一次方程式に対する前処理として、the operator splitting preconditioner (OSP)<sup>6, 42)</sup>が知られている。係数行列は近傍点からなる疎行列と遠方点からなる密行列に分解され、近傍点からなる疎行列からILUCにより前処理



行列が構成される。OSP-ILUCによる前処理は、遠方点からなる密行列を必要としないため、FMMを用いた境界要素法がさらに高速化されると期待できる。

そこで本研究では、ポンツーン型超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題の解析にOSP-ILUCを適用し、その数値実験結果から、本手法の有効性について検討する。

## 5.2 定式化及び解析モデル

解析モデルは、図-5.1に表される、一定水深 $h$ の無限海域に設置される、長さ $L$ 、幅 $B$ 、喫水 $d$ の箱形ポンツーン浮体である。平均自由水面上に $xy$ 平面をとり、 $z$ 軸は鉛直上向きが正の向きとなるように定義する。これに、波振幅 $A$ 、角周波数 $\omega$ の微小振幅波が入射するものとする。入射波方向 $\beta$ を、 $\beta = 0$ の時に $x$ 軸の正の方向から負の方向へ進行する波となり、 $\beta = \pi/2$ の時に $y$ 軸の正の方向から負の方向へ進行する波となるような方向として定義する。

流体を非粘性、非圧縮性の完全流体とし、流体運動を非回転的とするとき、全ての流体運動は速度ポテンシャル $\Phi$ で表現することができる。また、流体運動、浮体運動いずれも定常的な角周波数 $\omega$ の調和振動を行っているものとする。このとき、全ての時間依存項について、以下のように表す。

$$\Phi(x, y, z, t) = \text{Re}[\phi(x, y, z)e^{i\omega t}] \quad (5.2)$$

ただし、 $i$ は虚数単位を、 $t$ は時間を表す。

流体運動は微小であるとし、微小振幅波理論が適用できるものとする。この前提のもとで、本研究で扱う問題を、速度ポテンシャル $\phi$ に関する境界値問題として定式化する。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = K\phi \quad \text{on } S_F \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } B_0 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_H \quad (5.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial(\phi - \phi_I)}{\partial r} - ik(\phi - \phi_I) \right) = 0 \quad \text{on } S_\infty \quad (5.7)$$

$$\phi_I = i \frac{gA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} e^{ik(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (5.8)$$

ここで、 $\phi_I$ は入射波ポテンシャルである。また、 $\Omega$ は流体領域を、 $S_F$ は自由水面を、 $B_0$ はベースとなる $z = -h$ の一定水深面を、 $S_H$ は浮体の没水表面を、 $S_\infty$ は無限遠境界を表す。 $K$ は無限水深時波数( $= \omega^2/g$ ;  $g$ は重力加速度)を、 $k$ は波数を表し、次式の分散関

係式を満たす.

$$k \tanh kh = K \quad (5.9)$$

また,  $n$  は流体から外向き方向を正とする単位法線ベクトルを表す.  $r$  は原点からの水平距離である.

速度ポテンシャル  $\phi$  に関する境界条件式を積分方程式に代入すると次式が得られる.

$$4\pi\phi(x) + \int_{S_H} \phi(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} d\xi = 4\pi\phi_I(x) \quad (5.10)$$

ここで,  $G(x, \xi)$  は水波 Green 関数と呼ばれる, 境界条件式 (5.4), (5.5), (5.7) を満たす, Laplace 作用素  $\nabla^2$  の基本解である.

上式は,  $S_H$  の表面上に配置される  $N$  個の節点における未知ポテンシャル  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を未知数とする連立一次方程式に帰着される<sup>50, 48, 47</sup>).

### 5.3 前処理について

GMRESは前処理という手法により, 反復回数を大幅に減らすことができる場合がある.

前処理行列を  $M$  とする. 連立一次方程式 (5.1) を次式のような連立一次方程式

$$AM^{-1}y = b; \quad x = M^{-1}y \quad (5.11)$$

に変換し,  $AM^{-1}$  に対して GMRES を実行することにより解を求める場合, (右)前処理と呼ばれている.  $M$  として, その逆行列  $M^{-1}$  がすぐに計算でき, さらに  $AM^{-1}$  のスペクトルが 1 の近くに集まるようなものが望ましく, 次の不等式<sup>36)</sup>から反復回数が減少すると期待される.

$$\frac{\|r_m\|_2}{\|r_0\|_2} \leq \frac{L}{2\pi\epsilon} \inf_{\substack{p_m \in P_m \\ p_m(0)=1}} \|p_m\|_{\Lambda_\epsilon} \quad (5.12)$$

ただし,  $\epsilon$  は適当に与えた正の実数であり,  $\Lambda_\epsilon$  は  $AM^{-1}$  の  $\epsilon$ -pseudospectrum<sup>36)</sup>全体,  $L$  は  $\Lambda_\epsilon$  の境界の長さ,  $P_m$  は  $m$  次多項式全体,  $r_m$  は GMRES による近似解  $x_m$  の残差である.

## 5.4 Operator splitting preconditioners

水波 Green 関数  $G(x, \xi)$  は,  $S_H$  上の各点  $x$  に対して

$$\lim_{\xi \rightarrow x} |G(x, \xi)| = +\infty \quad (5.13)$$

であるから, 係数行列  $A$  の成分は, 各節点  $x_i$  に対して, 節点  $x_j$  が節点  $x_i$  に近いとき  $|a_{ij}|$  は大きな値を取る.

正の実数  $r$  に対して,  $A_{\text{near}}(r) = \{a_{ij} \in \mathbf{C} : \|x_i - x_j\|_2 < r\}$ ,  $A_{\text{far}}(r) = \{a_{ij} \in \mathbf{C} : \|x_i - x_j\|_2 \geq r\}$  により

$$A = A_{\text{near}}(r) + A_{\text{far}}(r) \quad (5.14)$$

と分解する.

$r$  は  $A_{\text{near}}(r)$  が疎行列となるように定められる. 前処理行列  $M$  は, 疎行列  $A_{\text{near}}(r)$  から構成され,

$$AM^{-1} \approx \{A_{\text{near}}(r) + A_{\text{far}}(r)\}A_{\text{near}}(r)^{-1} \quad (5.15)$$

$$= I + A_{\text{far}}(r)A_{\text{near}}(r)^{-1} \quad (5.16)$$

であるから,  $\|A_{\text{far}}(r)A_{\text{near}}(r)^{-1}\|$  が小さくなるように  $r$  を選べば,  $AM^{-1}$  のスペクトルは 1 の近くに集まることが期待される. このような前処理は the operator splitting preconditioner (OSP)<sup>6)</sup> と呼ばれている.

$r$  を大きくすると  $\|A_{\text{far}}(r)\|$  の値は減少するが,  $\|A_{\text{near}}(r)^{-1}\|$  の値は増加するため,  $r$  を大きく選んでも収束性の改善は期待できないと思われる.

## 5.5 Crout version of ILU

ここでは、疎行列  $A_{\text{near}}(r)$  から、the Crout version of the incomplete LU factorization (ILUC)<sup>18)</sup>を用いて、前処理行列  $M$  を構成する。

ILUCのアルゴリズムは以下のとおりである。ここではbreak downを避けるために、 $U$ の対角成分  $d_k$  がマシンイプシロン  $\text{eps}$  より小さいときは  $10^{-3}$  で置き換えることにする。

### ILUC

```

do  $k = 1, \dots, n$ 
  do  $j = k, \dots, n$ 
     $z_j = a_{kj}$ 
  end do
  do  $i = 1, \dots, k - 1; l_{ki} \neq 0$ 
    do  $j = k, \dots, n; u_{ij} \neq 0$ 
       $z_j = z_j - l_{ki}u_{ij}$ 
    end do
  end do
  do  $j = k + 1, \dots, n$ 
     $w_j = a_{jk}$ 
  end do
  do  $i = 1, \dots, k - 1; u_{ik} \neq 0$ 
    do  $j = k + 1, \dots, n; l_{ji} \neq 0$ 
       $w_j = w_j - l_{ji}u_{ik}$ 
    end do
  end do
  if ( $|z_k| < \text{eps}$ ) then
     $z_k = 10^{-3}$ 
  end if
   $d_k = z_k$ 
  do  $j = k + 1, \dots, n$ 
    if ( $|z_j| \geq \tau$ ) then

```

```

         $u_{kj} = z_j$ 
    end if
end do
do  $j = k + 1, \dots, n$ 
    if  $(|w_j| \geq \tau)$  then
         $l_{jk} = w_j/d_k$ 
    end if
end do
end do

```

ILUCは2つのパラメータ $\tau, p$ により制御され、 $\tau$ は $L, U$ の成分の絶対値の最小の値を、 $p$ は $L$ の各列当たりの最大の個数、および $U$ の各行当たりの最大の個数を表す。

## 5.6 数値実験結果

図-5.1において $L = 2000\text{m}$ ,  $B = 400\text{m}$ ,  $d = 1.5\text{m}$ ,  $h = 20\text{m}$ としたモデルについて入射角を $x$ 軸から $\pi/3$ , 入射波長 $\lambda$ を $88.770\text{m}$  または  $55.034\text{m}$ としてベンチマーク解析を行う.

要素としては4節点1次要素を用いる. 底面を $5\text{m} \times 5\text{m}$ のパネルで, 側面を $5\text{m} \times 1.5\text{m}$ のパネルで分割し, 要素数32960, 節点数33441である. 反復はすべて初期値 $x_0 = 0$ から始め, 京都大学学術情報メディアセンターのスーパーコンピュータHPC2500において倍精度でスレッド並列計算(32CPU)を行った. なお, the fast multipole method (FMM)<sup>10, 50)</sup>の並列化においては西村, 宗像(2004)<sup>37)</sup>を参照し, 行列-ベクトル積の計算における上向きpass及び下向きpassに対して適用した.

図-5.2, 5.3は, 浮体底面( $z = -1.5$ )の $x$ 軸上における圧力分布 $p(x, 0, -1.5)$ を図にしたものである. また, 前処理を適用した場合と適用しなかった場合とで圧力分布がほぼ完全に一致することを確認している.

Table 5.1  $r$ を変化させたときのOSP-ILUCの計算結果.  $\lambda = 88.770\text{m}$ ,  $N = 33441$ .

$r(\text{m})$	Ratio <sub>A</sub>	Ratio <sub>M</sub>	Its	Pre(s)	It(s)	Tot(s)
0	0.000	0.000	412	0	2126	2126
20	0.002	0.007	296	220	1609	1829
40	0.007	0.034	191	599	1105	1704
60	0.014	0.048	169	753	988	1741
80	0.024	0.049	206	715	1174	1889
60	0.014	0.082	169	1606	1064	2670
80	0.024	0.191	203	6632	1690	8322

ILUC( $\tau, p$ )において,  $\tau = 10^{-5}$ ,  $p = 0.025 \times N$ に固定した.  $r$ は節点間の距離(m)を表すパラメータである. “Ratio<sub>A</sub>”は $A_{\text{near}}(r)$ の0でない成分の個数を係数行列 $A$ の成分の個数( $= N^2$ )で割った比率を, “Ratio<sub>M</sub>”はILUCにより得られた $L$ と $U$ の0でない成分の個数を係数行列 $A$ の成分の個数( $= N^2$ )で割った比率を表し,  $2p/N(= 0.05)$ がその上限となる. “Its”は反復回数を, “Pre”は前処理行列の作成時間(s)を, “It”は反復に要した時間(s)を, “Tot”は全計算時間(s)を表す. 但し, いずれも経過時間である. “—”は反復回数が1000以内で収束が達成されなかったことを意味する. また, 収束回数は $\|r\|_2 \leq 10^{-5} \|b\|_2$ が満たされる最小の数とした.



Table 5.2  $r$ を変化させたときのOSP-ILUCの計算結果.  $\lambda = 55.034\text{m}$ ,  $N = 33441$ .

$r(\text{m})$	Ratio <sub>A</sub>	Ratio <sub>M</sub>	Its	Pre(s)	It(s)	Tot(s)
0	0.000	0.000	664	0	3553	3553
20	0.002	0.010	326	271	1826	2097
40	0.007	0.043	240	820	1487	2307
60	0.014	0.049	441	872	2772	3644
80	0.024	0.048	—	886	—	—
60	0.014	0.167	441	6323	3898	10221
80	0.024	0.239	508	9754	4565	14319

表-5.1において $r$ が80m以上のとき、及び表-5.2において $r$ が60m以上のとき、収束回数が増加している。これは、Ratio<sub>M</sub>が0.05を超えないように、ILUCのパラメータ $p$ を $p = 0.025 \times N$ と設定したため、 $M$ が $A_{\text{near}}(r)$ を十分に近似していなかったのではないかと考えた。そこで、Ratio<sub>M</sub>が0.4を超えないように、 $p$ を $p = 0.2 \times N$ と設定した結果を表-5.1, 5.2の最後の2行に加えてある。しかし、収束特性に大きな変化は見られなかったため、収束回数の増加は $r$ を大きくすることにより $\|A_{\text{near}}(r)^{-1}\|$ の値が増加したためであると思われる。図-5.4, 5.5は、それぞれ入射波長 $\lambda$ を88.770m, 55.034mとしたとき、OSP-ILUCを適用したときと前処理を適用しなかったときのGMRESの収束特性を比較して図にしたものである。これらの図から、入射波長 $\lambda$ とは無関係に、今回の解析モデルに対しては、パラメータ $r$ を $r = 40\text{m}$ と固定しても、GMRESの収束回数を大幅に減少させられることが分かる。

Table 5.3  $\tau$ を変化させたときのILUCの計算結果.  $\lambda = 197.492\text{m}$ ,  $N = 33441$ .

$\tau$	Ratio <sub>M</sub>	Its	Pre(s)	It(s)	Tot(s)
$\infty$	0.0	140	0	2988	2988
1.0	0.00003	138	2395	2925	5320
0.1	0.00067	123	2402	2607	5009
0.04	0.0102	93	2449	1987	4436
0.02	0.1716	28	8272	687	8959

表-5.3, 5.4 は、OSPを用いず、密行列 $A$ に対してILUCを適用したときの結果である。ここでは8CPUでスレッド並列計算を行った。 $\tau$ が $\infty$ であるとは、前処理を適用しない通常のGMRESを意味する。行列-ベクトル積においては、FMMの適用により $A_{\text{far}}$ の成分を計算する必要はないものの、ここでは $M$ を作成するためだけに $A$ の全成分を計

Table 5.4  $\tau$ を変化させたときのILUCの計算結果.  $\lambda = 55.034\text{m}$ ,  $N = 33441$ .

$\tau$	Ratio <sub>M</sub>	Its	Pre(s)	It(s)	Tot(s)
$\infty$	0.0	664	0	15131	15131
1.0	0.0002	544	3021	12313	15334
0.8	0.0004	475	2944	10761	13705
0.6	0.0012	311	2949	7002	9951
0.4	0.0140	577	3115	13356	16471
0.2	0.1239	309	6151	7716	13867

算しなければならず,  $M$ の作成に多くの時間がかかっている. また,  $A$ は密行列であるため $M$ の作成時間を考慮すると $\tau$ の値を非常に大きくする必要があり,  $M$ は $A$ を十分に近似しないことが起こる. さらに $\tau$ は同一モデルに対してさえも入射波長 $\lambda$ によって最適値が異なり, その設定は困難である<sup>22)</sup>. しかしながら, OSP-ILUCはパラメータ $r$ を増加させても反復回数の減少は見込まれなかったが, OSPを適用しないILUCは $\tau$ の減少とともに反復回数がほぼ単調に減少するという利点がある.

## 5.7 第5章のまとめ

本解析例に対して, OSP-ILUCに関するパラメータ $r$ を40ぐらいに, すなわち $\text{Ratio}_A$ が0.007ぐらいに固定できることが分かった. 他のモデルに対しても同様にパラメータが固定できると思われる. そのことにより, 密行列 $A$ そのものに対してILUCを適用したときの問題点である,  $A$ の全成分を計算する必要があることと, パラメータ $r$ の設定の困難さを解決した. 以上より, パフォーマンス面及びパラメータ設定の容易さの両面から, FMMと組み合わせた場合におけるOSP-ILUCの有効性を実証した.

## 5.8 第5章の付録

ここでは, the operator splitting preconditioner (OSP)<sup>6)</sup>により分解される, 近傍点からなる有界作用素<sup>38)</sup>と遠方点からなる有界作用素の性質を記述する.

まず, 積分方程式(5.10)を書き直し, 連立一次方程式(5.1)の係数行列 $A$ は非Hermite行列であることを示す.

$$K(x, \xi) = \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} \quad (5.17)$$

とおくと,  $K(x, \xi)$ は $S_H \times S_H$ で2乗可積分な関数である. すなわち

$$\int_{S_H} \int_{S_H} |K(x, \xi)|^2 dx d\xi < +\infty \quad (5.18)$$

このとき,  $X = L^2(S_H)$ における積分作用素 $T$ を

$$(Tu)(x) = \int_{S_H} K(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (x \in S_H) \quad (5.19)$$

によって定義すると,  $T$ は $X$ 上のコンパクト作用素<sup>38)</sup>である. ここで,  $L^2(S_H)$ は $S_H$ 上の複素数値2乗可積分関数からなるHilbert空間<sup>38)</sup>である. このとき, 積分方程式(5.10)は

$$(4\pi I + T)\phi = 4\pi\phi_I \quad (5.20)$$

と表される. このとき,  $\overline{K(\xi, x)} \neq K(x, \xi)$ であるから,  $T$ は $X$ 上の自己共役作用素<sup>38)</sup>ではない. したがって, 式(5.20)の離散化方程式である連立一次方程式(5.1)の係数行列 $A$ は非Hermiteであることが分かる.

次に, コンパクト作用素 $T_{\text{near}}(r)$ ,  $T_{\text{far}}(r)$ を定義し, 前処理行列 $M$ により変換された行列 $AM^{-1}$ のスペクトルが1の近くに集まることが期待できることを示す.  $r$ を正の実数とする.  $E(r) = \{(x, \xi) \in S_H \times S_H : \|x - \xi\| < r\}$ とおき,  $X$ における積分作用素 $T_{\text{near}}(r)$ を

$$(T_{\text{near}}(r)u)(x) = \int_{S_H} \chi_{E(r)}(x, \xi) K(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (x \in S_H) \quad (5.21)$$

によって定義する. ここで,  $\chi_{E(r)}(x, \xi)$ は $E(r)$ 上の点で1の値を, その他の点で0の値をとる関数である.  $F(r) = \{(x, \xi) \in S_H \times S_H : \|x - \xi\| \geq r\}$ とおき,  $X$ における積分作用素 $T_{\text{far}}(r)$ を

$$(T_{\text{far}}(r)u)(x) = \int_{S_H} \chi_{F(r)}(x, \xi) K(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (x \in S_H) \quad (5.22)$$

によって定義する. ここで,  $\chi_{F(r)}(x, \xi)$  は  $F(r)$  上の点で1の値を, その他の点で0の値をとる関数である.  $T_{\text{near}}(r)$ ,  $T_{\text{far}}(r)$  はともにコンパクト作用素であり, 有界作用素  $T$  は

$$T = T_{\text{near}}(r) + T_{\text{far}}(r) \quad (5.23)$$

と分解される. このとき, OSPによる前処理行列  $M$  は,  $X$  上の有界作用素  $M(r) = 4\pi I + T_{\text{near}}(r)$  を離散化したものである.

$r$  をあまり大きく選ばなければ  $M(r)$  は単写像となり,  $T_{\text{near}}(r)$  はコンパクトより  $M(r)$  は全写像, さらに開写像定理<sup>38)</sup>より  $M(r)^{-1}$  は有界となる. このとき,  $M(r)$  により変換された有界作用素は

$$(4\pi I + T)M(r)^{-1} = I + T_{\text{far}}(r)M(r)^{-1} \quad (5.24)$$

となり,  $M(r)^{-1}$  は有界であったから  $T_{\text{far}}(r)M(r)^{-1}$  はコンパクトであり,  $T_{\text{far}}(r)M(r)^{-1}$  のスペクトルは原点以外には集積点を持たない. したがって, (5.24) の左辺を離散化した行列  $AM^{-1}$  のスペクトルが1の近くに集まることが期待できる.

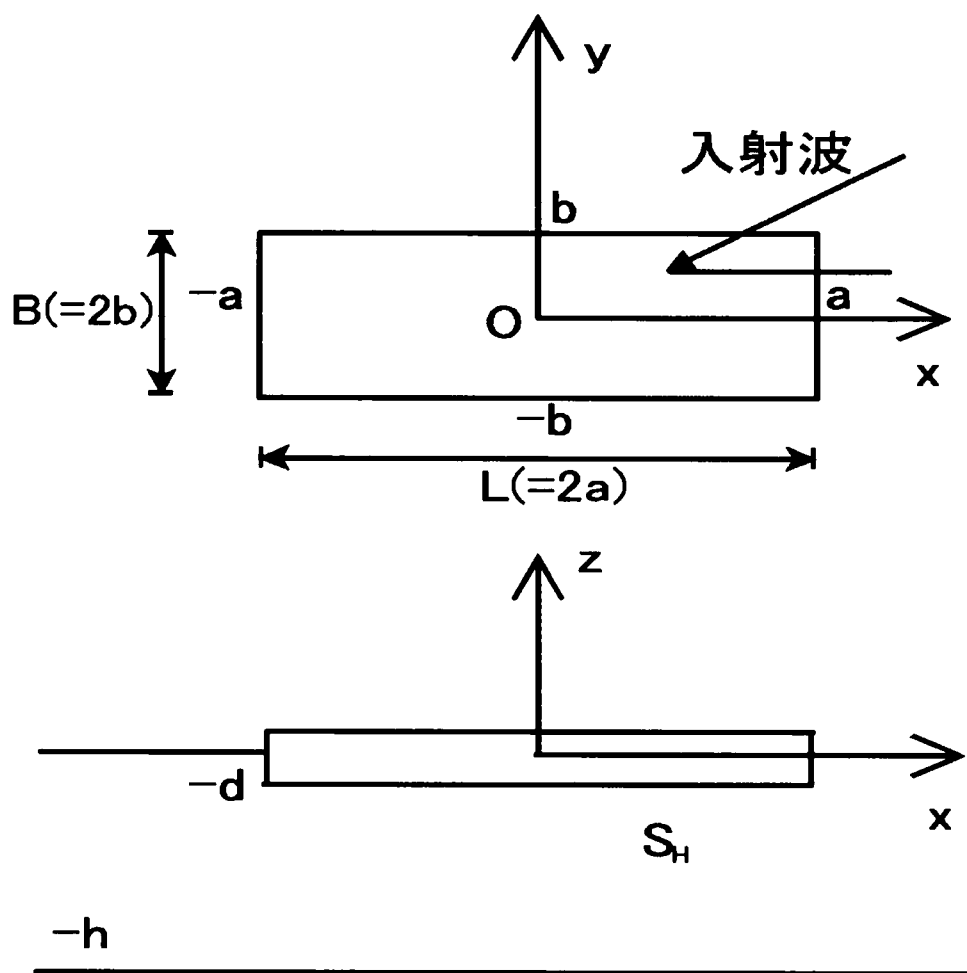


Fig. 5.1 ポンツーン型浮体

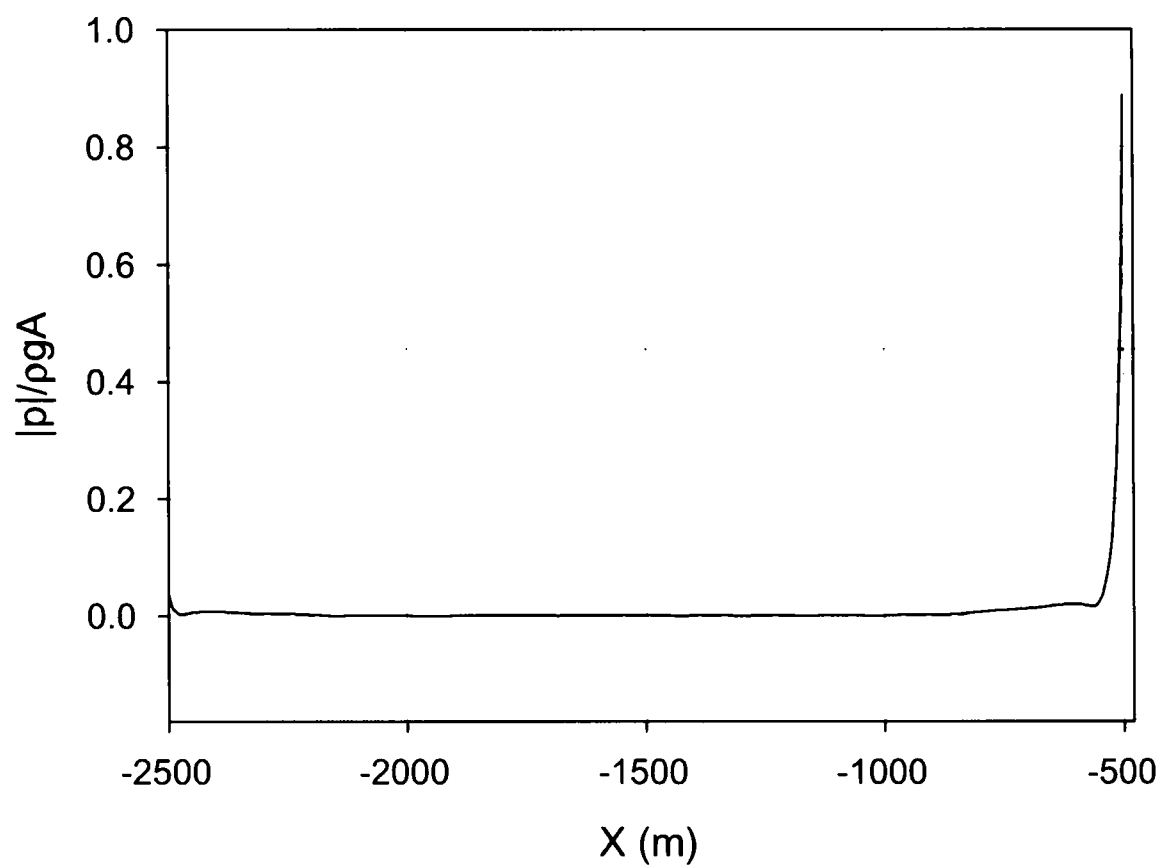


Fig. 5.2 ポンツーン底面圧力分布 入射波長=88.770m

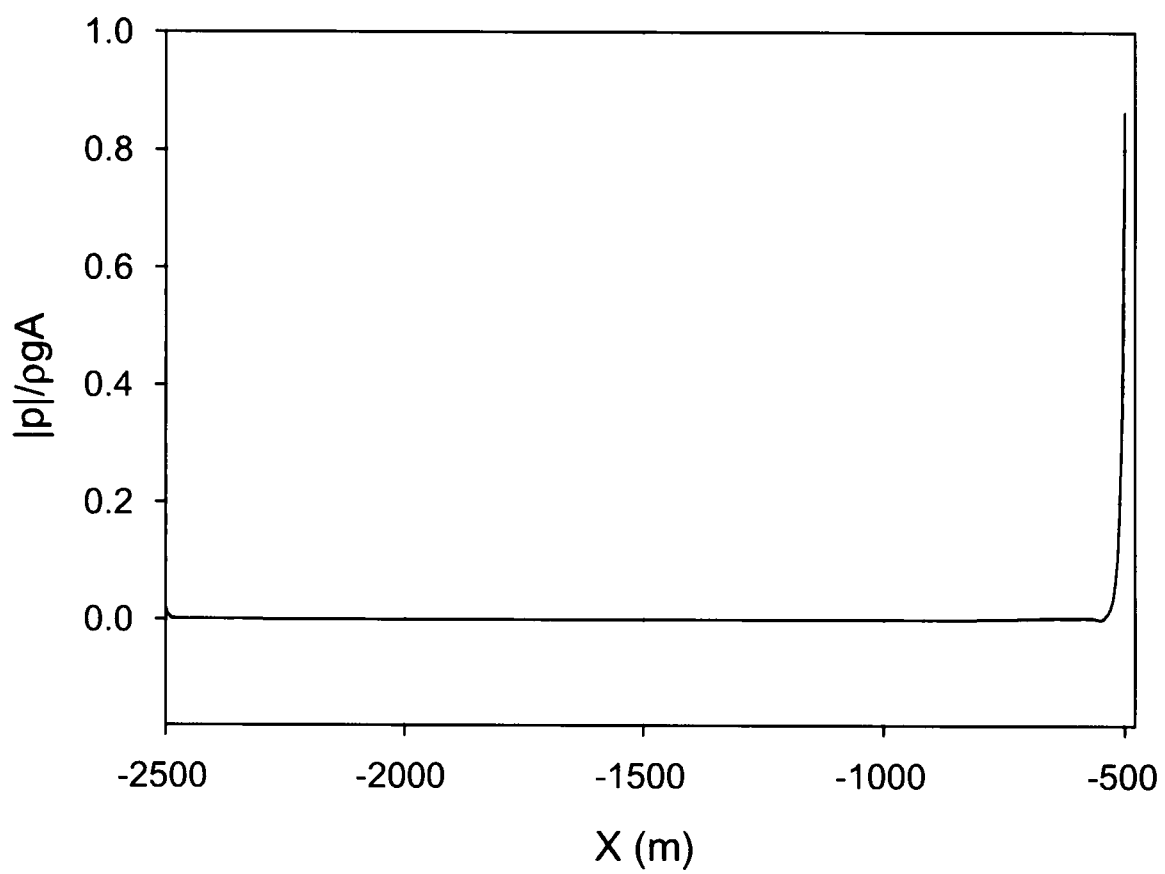


Fig. 5.3 ポンツーン底面圧力分布 入射波長=55.034m



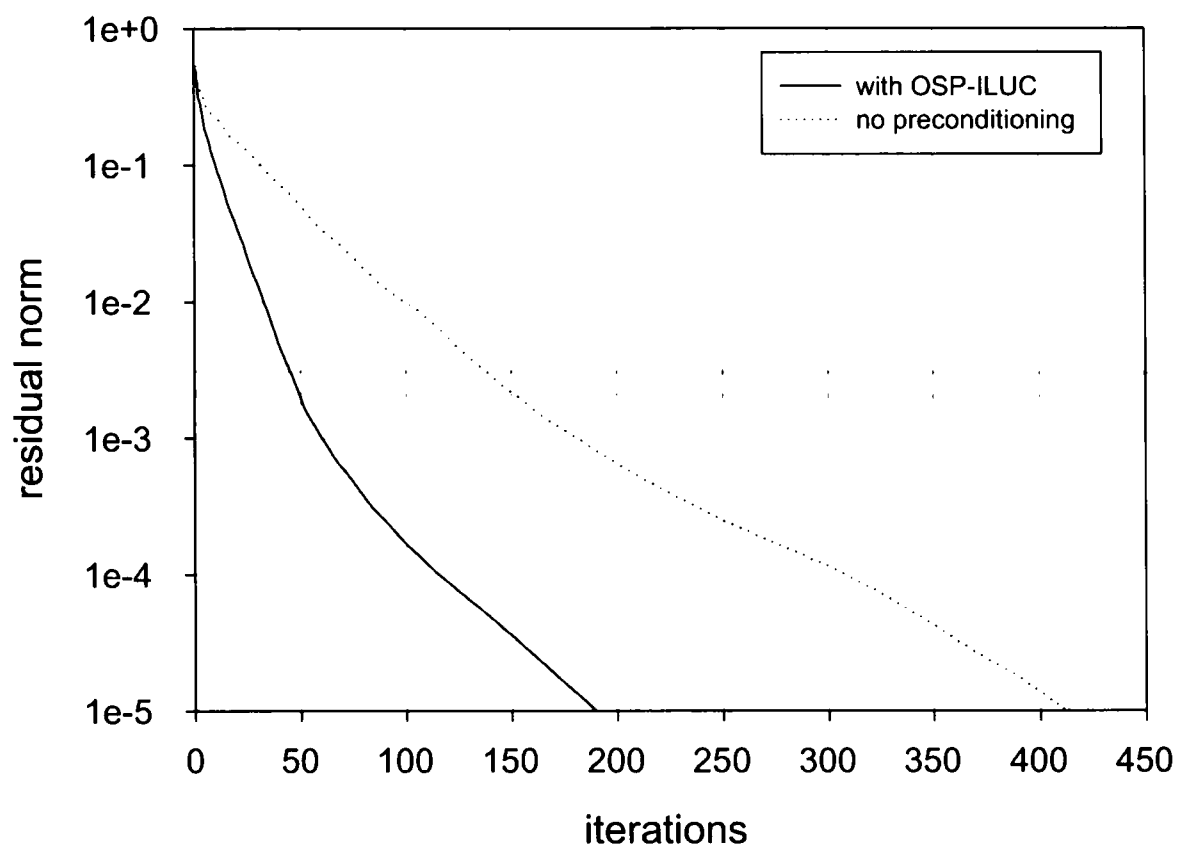


Fig. 5.4 OSP-ILUCを適用したときと, 前処理を適用しなかったときの収束特性の比較.  $\lambda = 88.770m$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 40m$ .

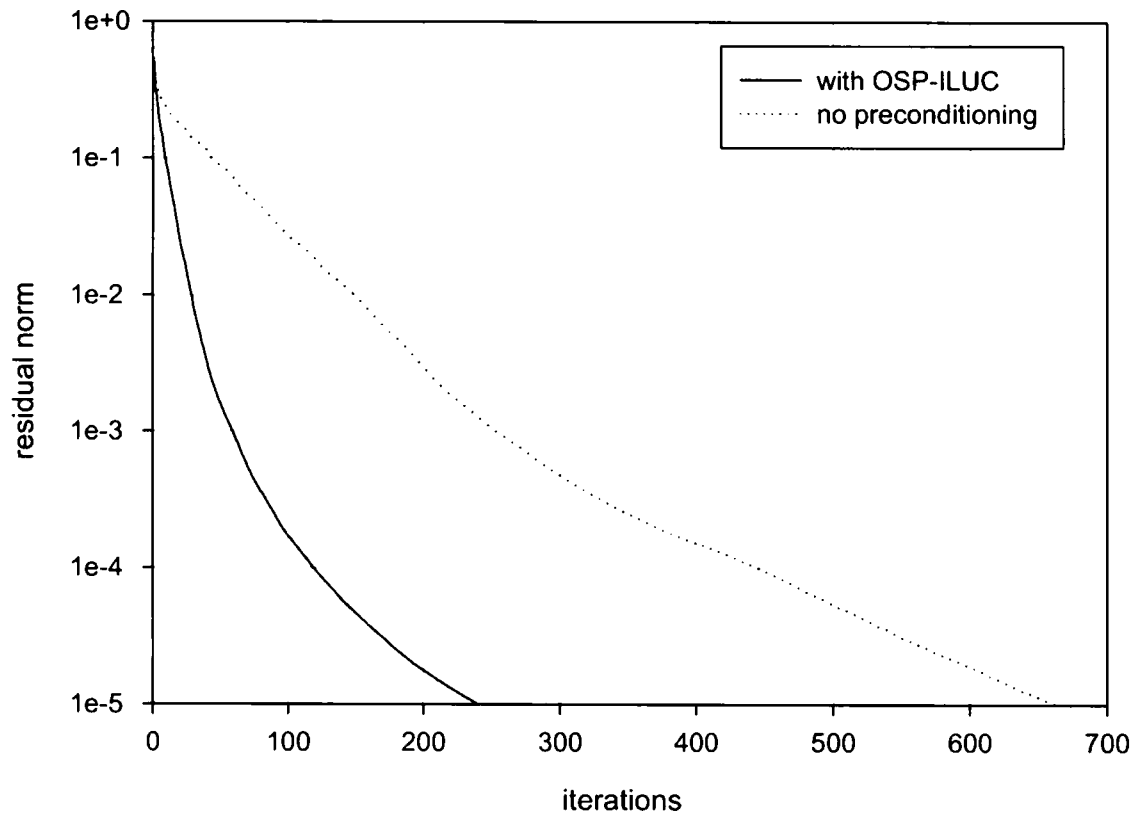


Fig. 5.5 OSP-ILUCを適用したときと, 前処理を適用しなかったときの収束特性の比較.  $\lambda = 55.034m$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 40m$ .

## 第6章 OSP-ILUCの非エルミート密行列への適用性に関する固有値分布からの検討

### 6.1 はじめに

超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題の解析において、外部領域が非有界で境界条件が単純でないことから、流体に対しては境界要素法(BEM)が、構造物に対しては有限要素法(FEM)が適しており、流体と構造物の境界における速度の法線成分の連続性により両手法が結合される<sup>1, 49)</sup>。最終的には、非Hermiteかつ密行列を係数とする大規模連立一次方程式

$$Ax = b \quad (6.1)$$

を解くことに帰着する。

大規模かつ非Hermite行列に対する反復法として、the generalized minimal residual method (GMRES)<sup>41, 52, 53)</sup>がよく知られている。ここでは、上 Hessenberg 行列分解を必要としないthe simpler GMRES<sup>53)</sup>を適用する。

本研究における積分作用素のスペクトルは、入射波長を短くしていくとともに、広がっていく傾向にある。また、反復法の収束率は係数行列のスペクトルに強く依存しており<sup>36, 19)</sup>、そのスペクトルが広がっている場合、収束は悪化し前処理を必要とする。境界要素法から得られた連立一次方程式に対する前処理として、the operator splitting preconditioner (OSP)<sup>6, 42)</sup>が知られている。係数行列は近傍点からなる疎行列と遠方点からなる密行列に分解され、近傍点からなる疎行列からthe Crout version of the incomplete LU factorization (ILUC)<sup>18)</sup>により前処理行列が構成される。反復法における行列-ベクトル積は、the fast multipole method (FMM)<sup>10, 50)</sup>を用いて近似され、遠方点に対応する行列成分は計算されない。OSP-ILUCによる前処理は、遠方点からなる密行列を必要としないため、FMMと組み合わせた場合における本手法の有効性を実証した<sup>23, 25, 26)</sup>。

本章では、反復法の収束率に強く影響している係数行列のスペクトルの計算を実際に行い、OSP-ILUC適用により変換された係数行列のスペクトルとの比較を行う。

## 6.2 定式化及び解析モデル

解析モデルは、図-6.1に表される、一定水深 $h$ の無限海域に設置される、長さ $L$ 、幅 $B$ 、喫水 $d$ の箱形ポンツーン浮体である。平均自由水面上に $xy$ 平面をとり、 $z$ 軸は鉛直上向きが正の向きとなるように定義する。非圧縮性の渦なし完全流体はポテンシャル流であり、その速度ポテンシャル $\phi$ はLaplace方程式を満たす。水波の振幅が極めて小さい場合を考えると、自由表面における境界条件は近似的に線形化することができる。水波Green関数と呼ばれる、自由水面、水底面および無限遠境界条件を満たす、Laplace作用素 $\nabla^2$ の基本解 $G(x, \xi)$ を用いると、速度ポテンシャル $\phi$ に関する次の積分方程式が得られる。

$$4\pi\phi(x) + \int_{S_H} \left\{ \phi(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} - \phi(x) \frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial n_\xi} \right\} d\xi = 4\pi\phi_I(x). \quad (6.2)$$

離散化により、 $S_H$ の表面上に配置される $N$ 個の節点における未知ポテンシャル $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ )を未知数とする連立一次方程式に帰着される<sup>50, 48, 47</sup>。

## 6.3 前処理について

GMRESは前処理という手法により, 反復回数を大幅に減らすことができる場合がある.

前処理行列を $M$ とする. 連立一次方程式(6.1)を次式のような連立一次方程式

$$AM^{-1}y = b; \quad x = M^{-1}y \quad (6.3)$$

に変換し,  $AM^{-1}$ に対してGMRESを実行することにより解を求める場合, (右)前処理と呼ばれている.  $M$ として, その逆行列 $M^{-1}$ がすぐに計算でき, さらに $AM^{-1}$ のスペクトルが1の近くに集まっているようなものが望ましい<sup>36, 19)</sup>.

### 6.3.1 Operator splitting preconditioners

正の実数 $r$ に対して,  $A_{\text{near}}(r) = \{a_{ij} \in \mathbf{C} : \|x_i - x_j\|_2 < r\}$ ,  $A_{\text{far}}(r) = \{a_{ij} \in \mathbf{C} : \|x_i - x_j\|_2 \geq r\}$ により

$$A = A_{\text{near}}(r) + A_{\text{far}}(r) \quad (6.4)$$

と分解する.

$r$ は $A_{\text{near}}(r)$ が疎行列となるように定められる. 前処理行列 $M$ は, 疎行列 $A_{\text{near}}(r)$ から構成され,

$$AM^{-1} \approx \{A_{\text{near}}(r) + A_{\text{far}}(r)\}A_{\text{near}}(r)^{-1} \quad (6.5)$$

$$= I + A_{\text{far}}(r)A_{\text{near}}(r)^{-1} \quad (6.6)$$

となる. また,  $A_{\text{far}}(r)A_{\text{near}}(r)^{-1}$ は適当なコンパクト作用素<sup>38)</sup>の離散化により得られた行列である<sup>6, 25)</sup>. このような前処理はthe operator splitting preconditioner (OSP)<sup>6)</sup>と呼ばれている.

### 6.3.2 Crout version of ILU

ここでは, 疎行列 $A_{\text{near}}(r)$ から, the Crout version of the incomplete LU factorization (ILUC)<sup>18)</sup>を用いて, 前処理行列 $M$ を構成する.

ILUCは2つのパラメータ $\tau, p$ により制御され,  $\tau$ は $L, U$ の成分の絶対値の最小の値を,  $p$ は $L$ の各列当たりの最大の個数, および $U$ の各行当たりの最大の個数を表す.

## 6.4 数値実験結果

図-6.1において $L = 2000\text{m}$ ,  $B = 400\text{m}$ ,  $d = 1.5\text{m}$ ,  $h = 20\text{m}$ としたモデルについて入射角を $x$ 軸から $\pi/3$ , 入射波長 $\lambda$ を $88.770\text{m}$ または $55.034\text{m}$ として, OSP-ILUCの適用による係数行列のスペクトル(固有値分布)の計算を行う.

要素としては4節点1次要素を用いる. 底面を $5\text{m} \times 5\text{m}$ のパネルで, 側面を $5\text{m} \times 1.5\text{m}$ のパネルで分割し, 要素数32960, 節点数33441である. 反復法としては, the simpler GMRES<sup>53)</sup>を用い, 初期値はすべて $x_0 = 0$ として, 京都大学学術情報メディアセンターのスーパーコンピュータHPC2500において倍精度でスレッド並列計算(32CPU)を行った. 近似固有値群として, the simpler GMRESの収束回数を $K$ としたとき, 係数行列 $AM^{-1}$ の, 部分空間 $AM^{-1} \text{Span}\{r_0, \dots, (AM^{-1})^{K-2}r_0\}$ に直交射影したRitz値<sup>39)</sup>群を計算した. ここで, Ritz値は, 絶対値の小さい固有値の近似はあまり良くないことが知られている<sup>39)</sup>.

Table 6.1  $r$ を変化させたときのOSP-ILUCの計算結果.  $\lambda = 88.770\text{m}$ ,  $N = 33441$ .

$r(\text{m})$	Ratio <sub>A</sub>	Ratio <sub>M</sub>	Its	Pre(s)	It(s)	Tot(s)
0	0.000	0.000	412	0	2126	2126
20	0.002	0.007	296	220	1609	1829
40	0.007	0.034	191	599	1105	1704
60	0.014	0.048	169	753	988	1741
80	0.024	0.049	206	715	1174	1889

Table 6.2  $r$ を変化させたときのOSP-ILUCの計算結果.  $\lambda = 55.034\text{m}$ ,  $N = 33441$ .

$r(\text{m})$	Ratio <sub>A</sub>	Ratio <sub>M</sub>	Its	Pre(s)	It(s)	Tot(s)
0	0.000	0.000	664	0	3553	3553
20	0.002	0.010	326	271	1826	2097
40	0.007	0.043	240	820	1487	2307
60	0.014	0.049	441	872	2772	3644
80	0.024	0.049	939	873	6651	7524

ILUC( $\tau, p$ )において,  $\tau = 10^{-5}$ ,  $p = 0.025 \times N$ に固定した.  $r$ は節点間の距離(m)を表すパラメータである. “Ratio<sub>A</sub>”は $A_{\text{near}}(r)$ の0でない成分の個数を係数行列 $A$ の成分の個数( $= N^2$ )で割った比率を, “Ratio<sub>M</sub>”はILUCにより得られた $L$ と $U$ の0でない成分の個数を係数行列 $A$ の成分の個数( $= N^2$ )で割った比率を表し,  $2p/N(= 0.05)$ がその上限と

なる。“Its”は反復回数を, “Pre”は前処理行列の作成時間(s)を, “It”は反復に要した時間(s)を, “Tot”は全計算時間(s)を表す。但し, いずれも経過時間である。また, 収束回数は $\|r\|_2 \leq 10^{-5}\|b\|_2$ が満たされる最小の数とした。

図-6.2, 6.8は, それぞれ入射波長 $\lambda$ を88.770m, 55.034mとしたとき, OSP-ILUCを適用したときと前処理を適用しなかったときのGMRESの収束特性を比較して図にしたものである。パラメータ $r$ を40mに固定しても, GMRESの収束回数を大幅に減少させることができることが分かる。

表-6.1, 6.2は, それぞれ入射波長 $\lambda$ を88.770m, 55.034mとしたとき, OSP-ILUCの計算結果を表にしたものである。パラメータ $r$ が80mのとき, GMRESの収束回数が増加している。その原因を調べるため, OSP-ILUCの適用による係数行列のスペクトルを計算してみた。図-6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7は, 入射波長 $\lambda$ を88.770mとして, パラメータ $r$ を増加させたときの係数行列のスペクトルを図にしたものである。また, 図-6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13は, 入射波長 $\lambda$ を55.034mとして, パラメータ $r$ を増加させたときの係数行列のスペクトルを図にしたものである。

前処理を適用しなかったとき, 入射波長を短くしていくと, 係数行列のスペクトルが広がっていくことが分かる。入射波長を短くすると, 反復回数が増加するのは, このことが原因だと考えられている<sup>36, 19)</sup>。

また, OSP-ILUCを適用したとき, パラメータ $r$ の増加とともに, 係数行列のスペクトルが集まっていくことが分かる。 $r$ が80mのときGMRESの収束回数が増加しているが, その原因として係数行列のスペクトルが原点の近くに集まったためであると考えられる。

## 6.5 第6章のまとめ

本解析例に対して, 入射波長を短くしていくと, 係数行列のスペクトル(固有値分布)が広がっていくことを数値実験により確認した. さらに, OSP-ILUCの適用したとき, パラメータ $r$ を増加させると, 係数行列のスペクトルが集まっていくことも確認した. また,  $r$ が80mのとき, 係数行列のスペクトルが集まっているにもかかわらず, 収束回数が増加している現象を確認した. その原因として, 係数行列のスペクトルが原点の近くに集まったためであると考えられる.



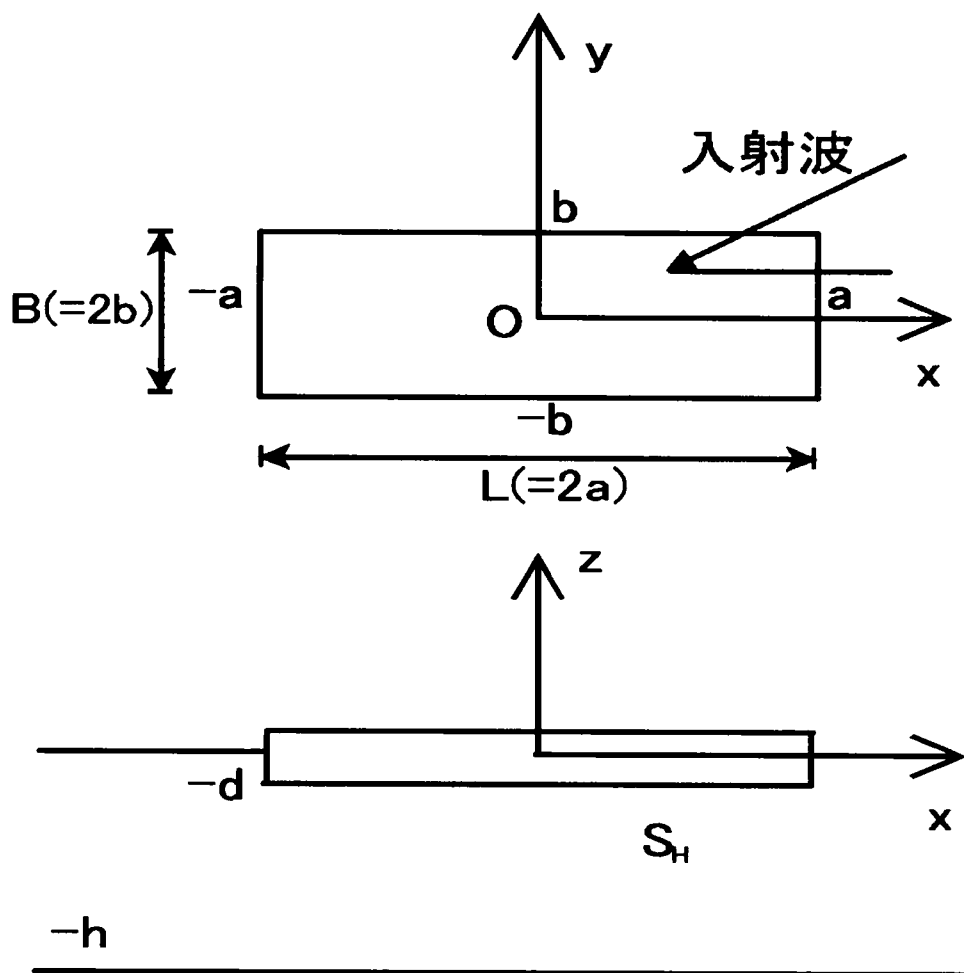


Fig. 6.1 ポンツーン型浮体

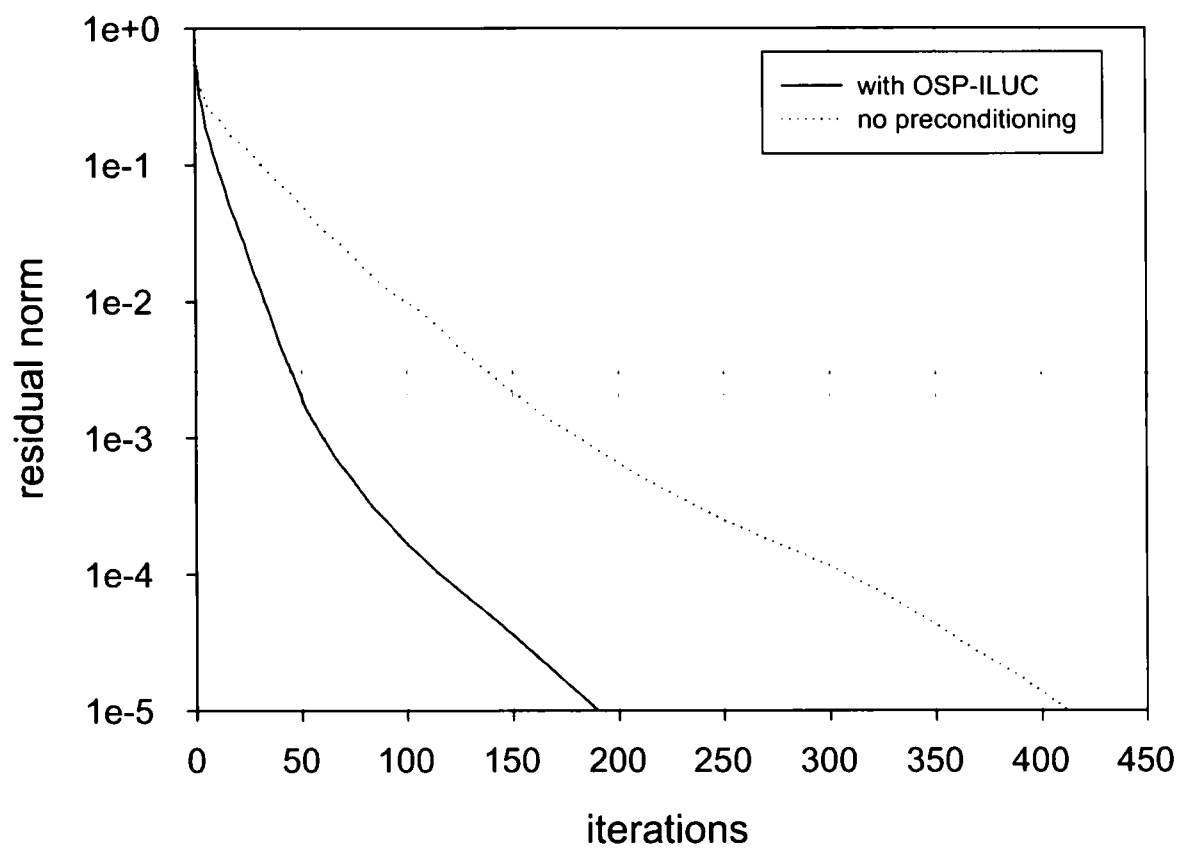


Fig. 6.2 OSP-ILUCを適用したときと, 前処理を適用しなかったときの収束特性の比較.  $\lambda = 88.770m$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 40m$ .

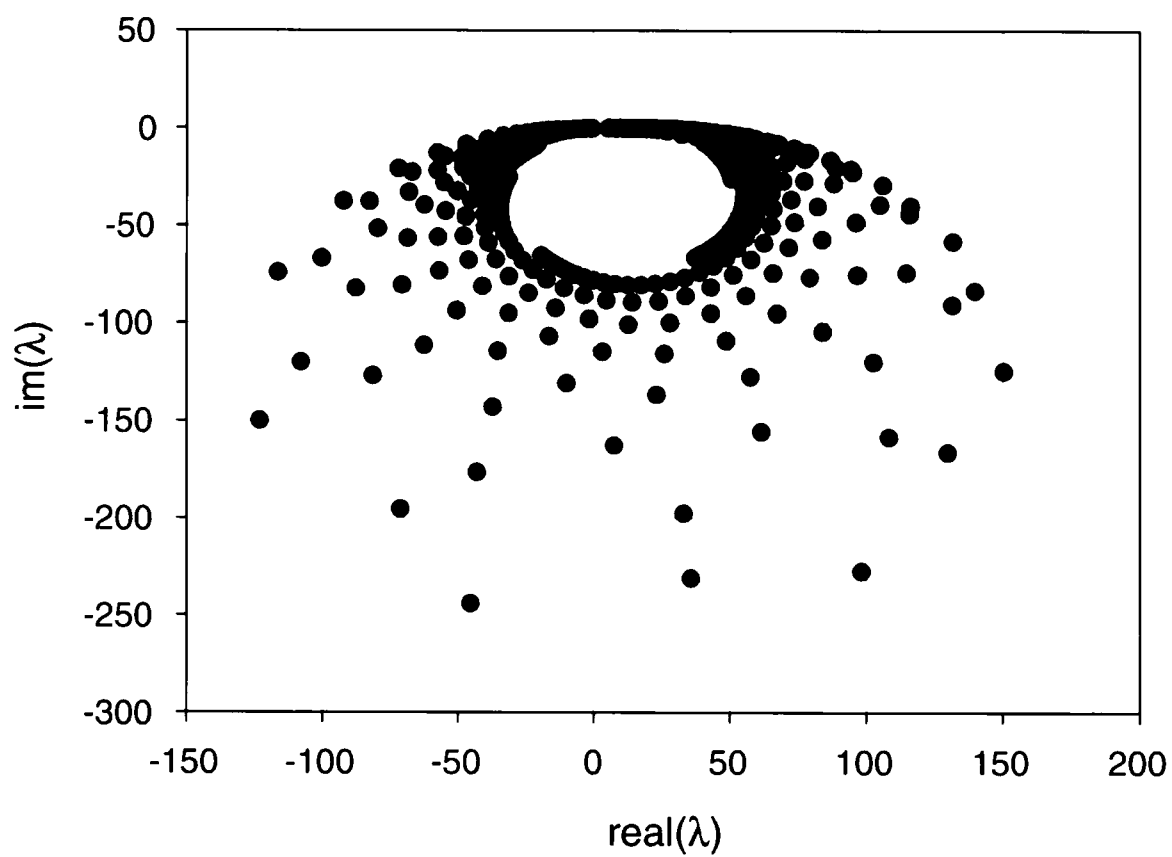


Fig. 6.3 前処理を適用しなかったときのスペクトル.  $\lambda = 88.770\text{m}$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 0\text{m}$ .

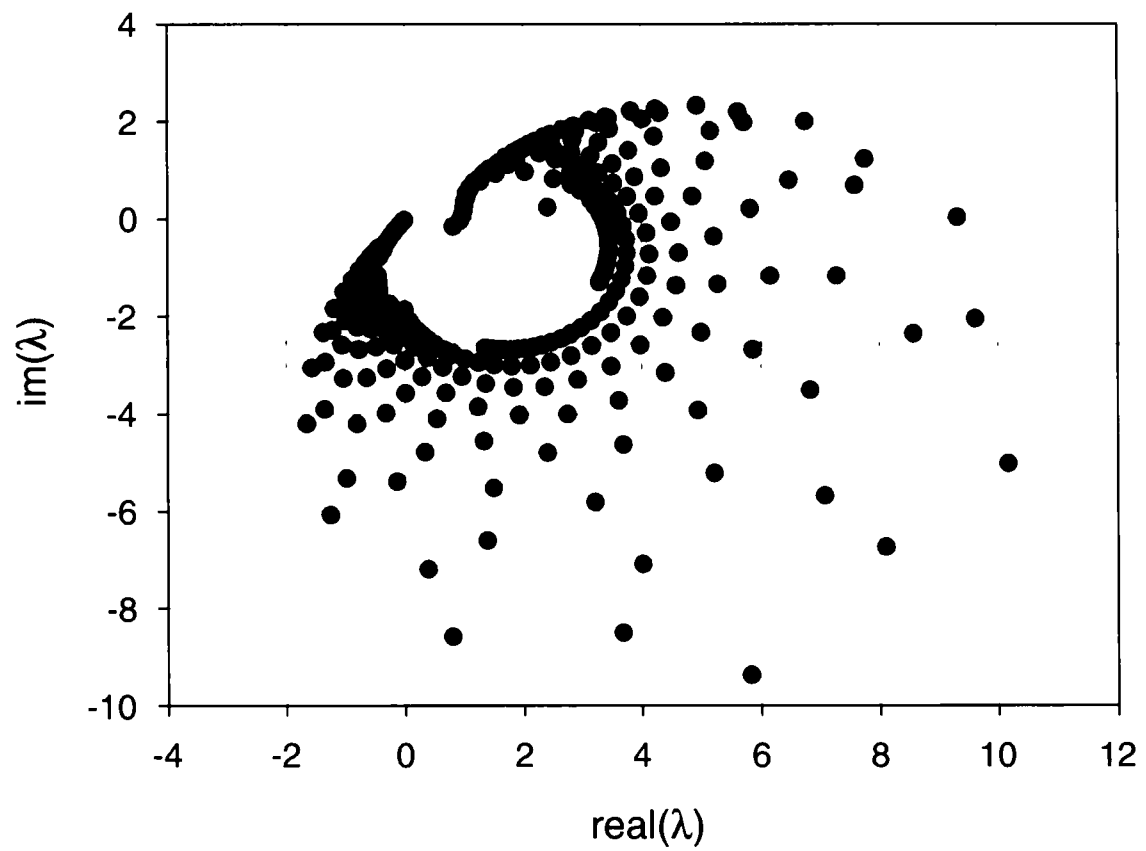


Fig. 6.4 OSP-ILUCを適用したときのスペクトル.  $\lambda = 88.770m$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 20m$ .

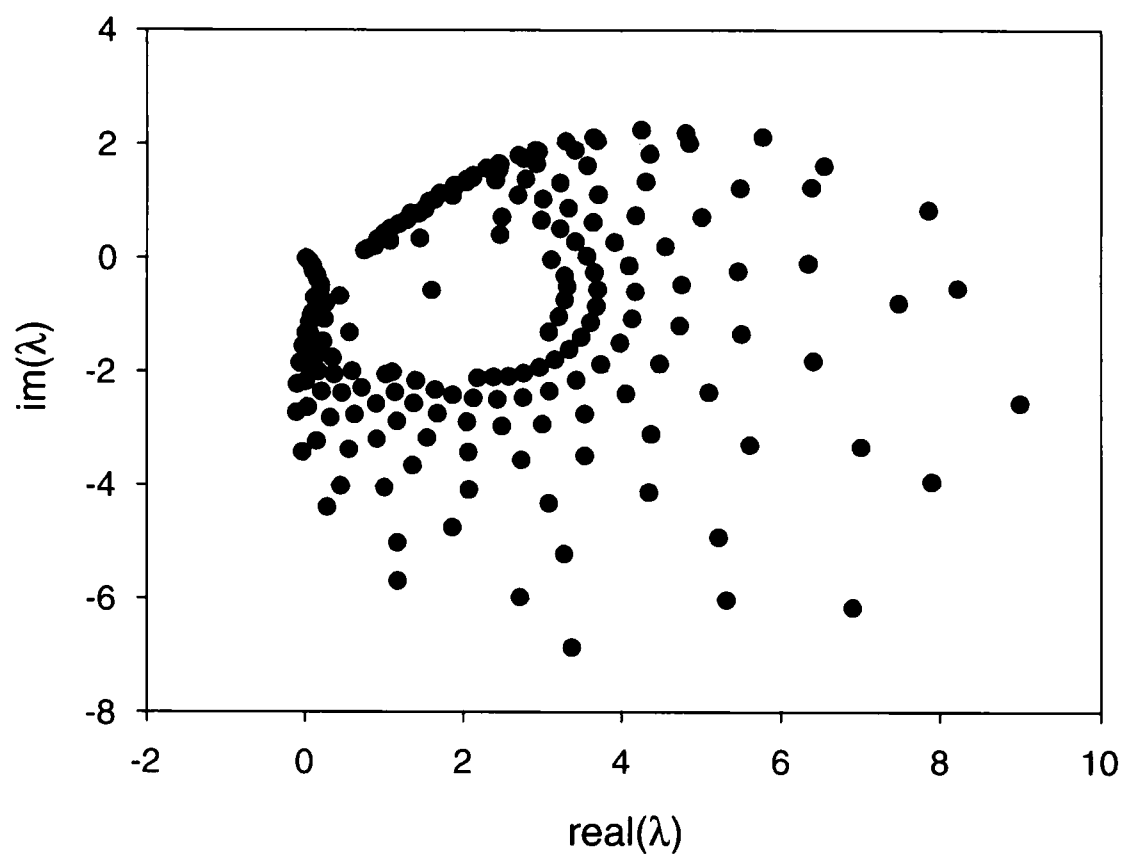


Fig. 6.5 OSP-ILUCを適用したときのスペクトル.  $\lambda = 88.770\text{m}$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 40\text{m}$ .

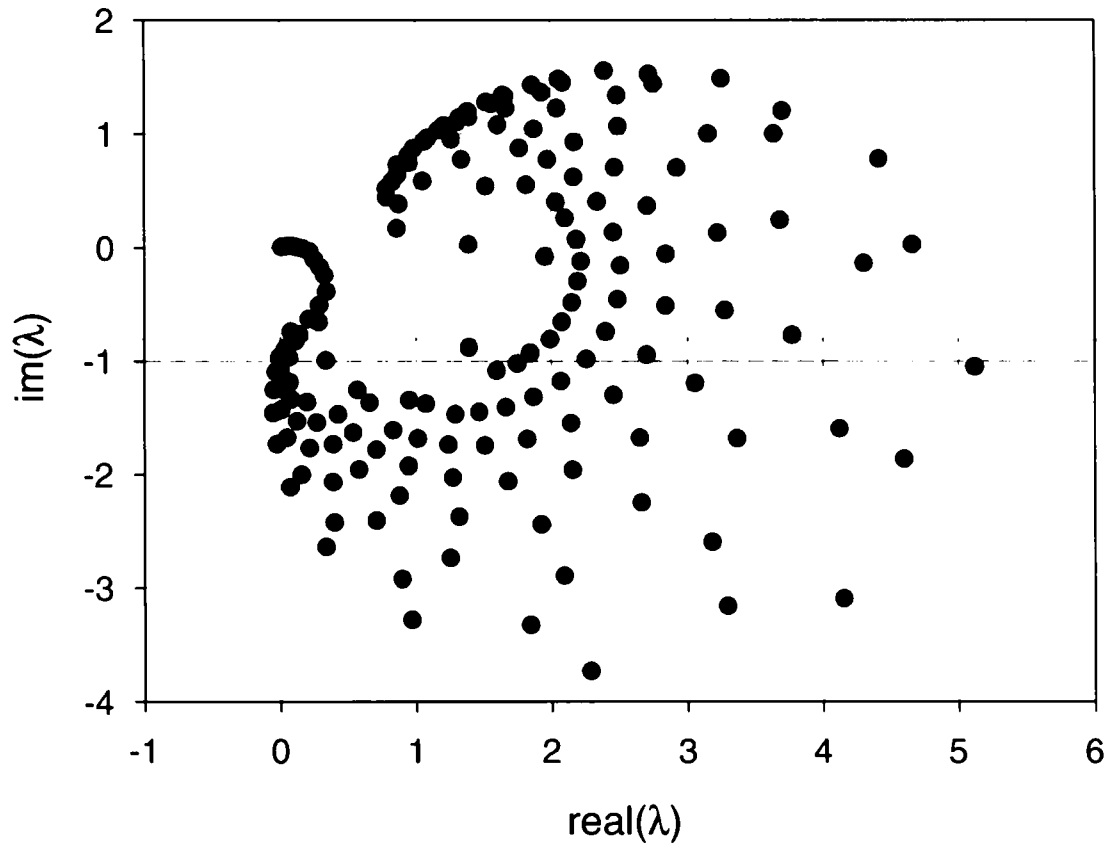


Fig. 6.6 OSP-ILUCを適用したときのスペクトル.  $\lambda = 88.770\text{m}$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 60\text{m}$ .

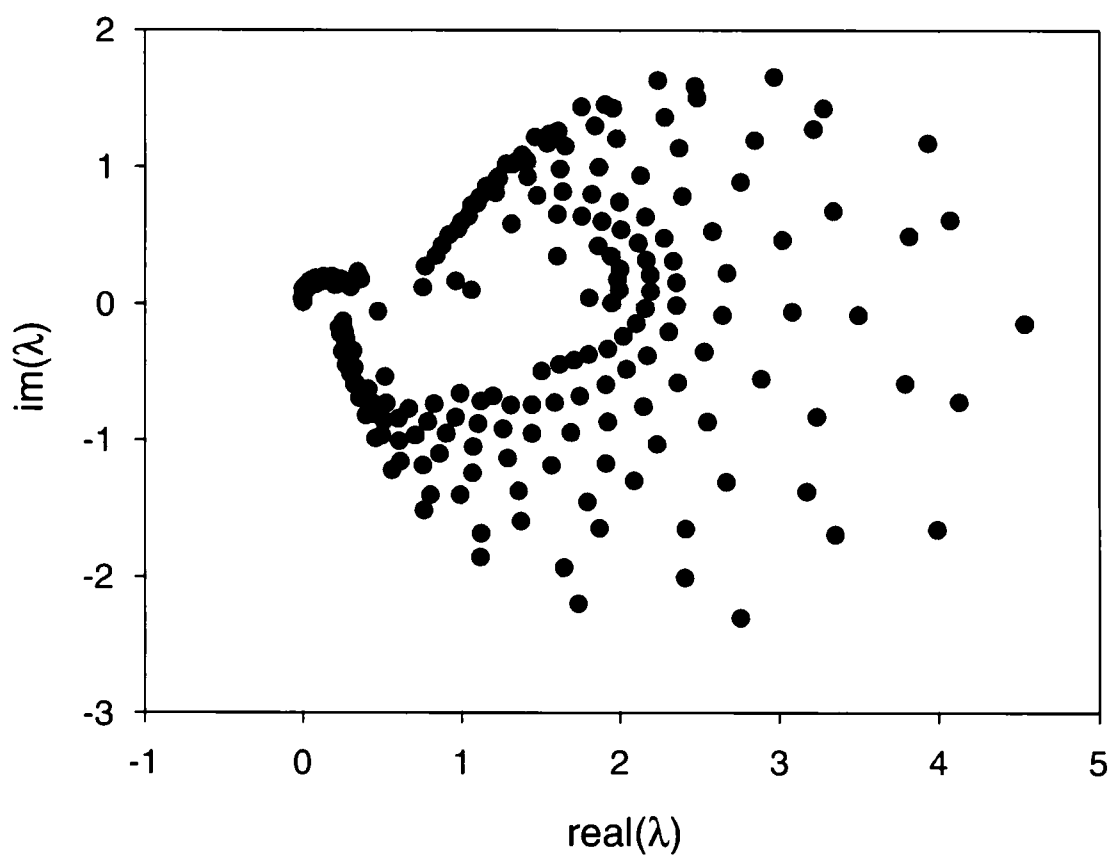


Fig. 6.7 OSP-ILUCを適用したときのスペクトル.  $\lambda = 88.770m$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 80m$ .

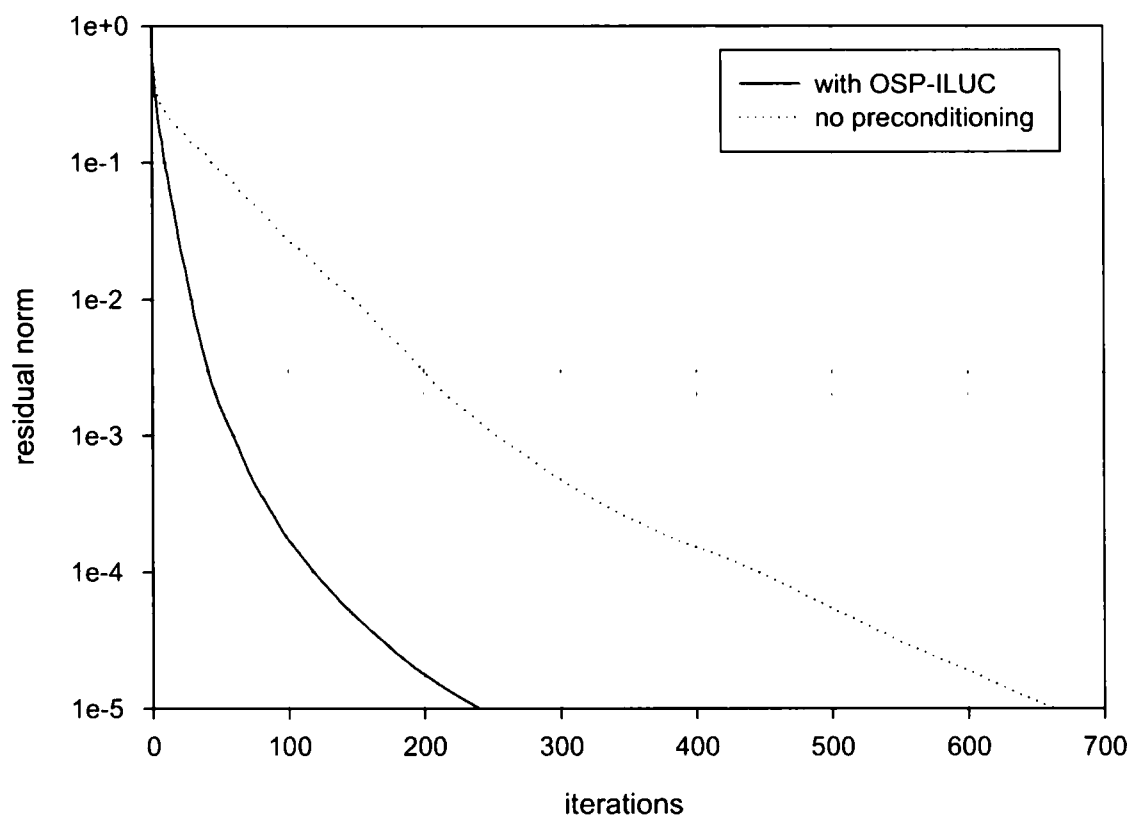


Fig. 6.8 OSP-ILUCを適用したときと, 前処理を適用しなかったときの収束特性の比較.  $\lambda = 55.034m$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 40m$ .



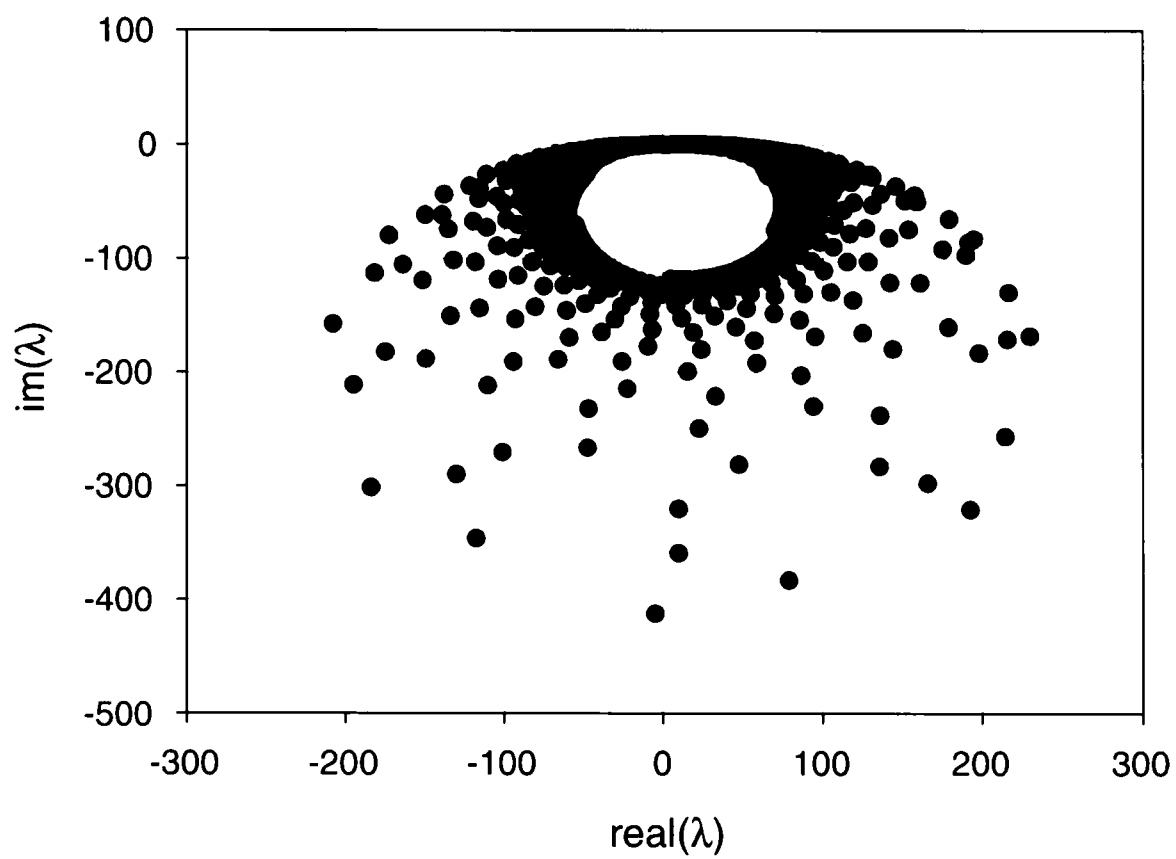


Fig. 6.9 前処理を適用しなかったときのスペクトル.  $\lambda = 55.034m$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 0m$ .

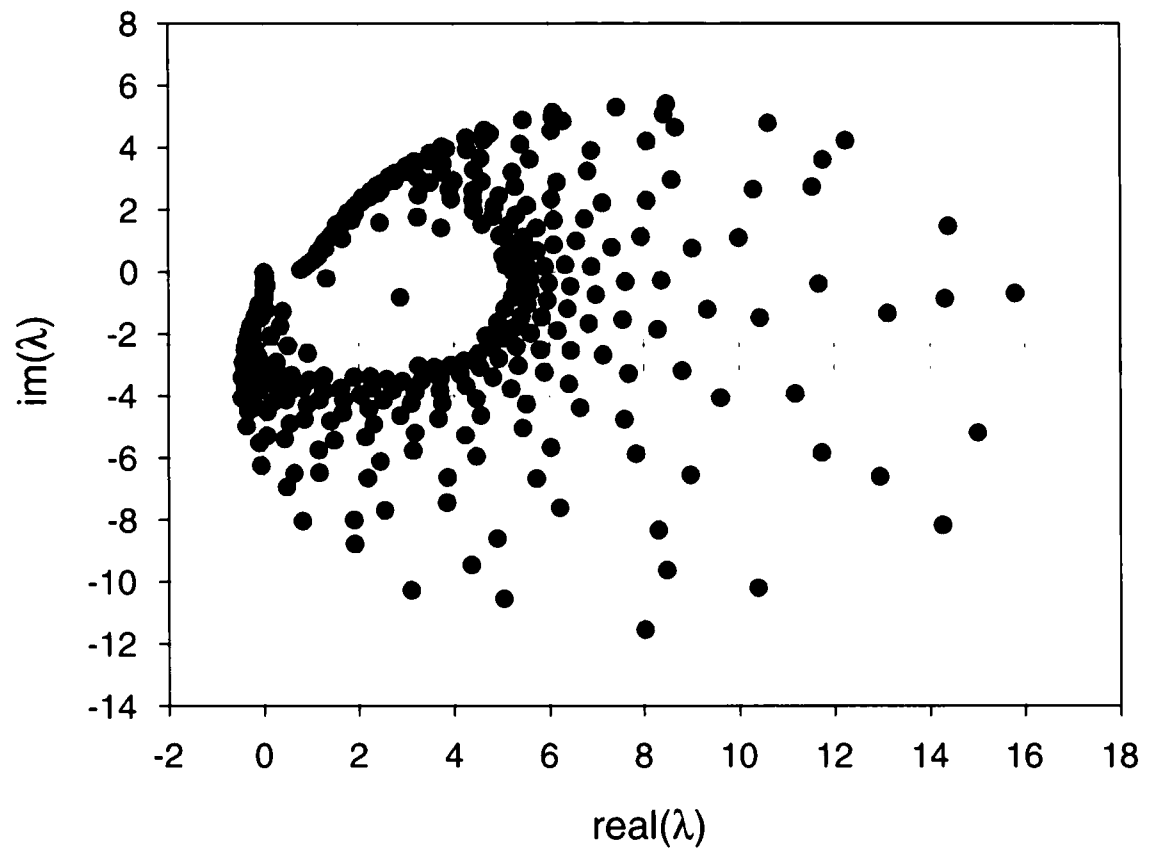


Fig. 6.10 OSP-ILUCを適用したときのスペクトル.  $\lambda = 55.034m$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 20m$ .

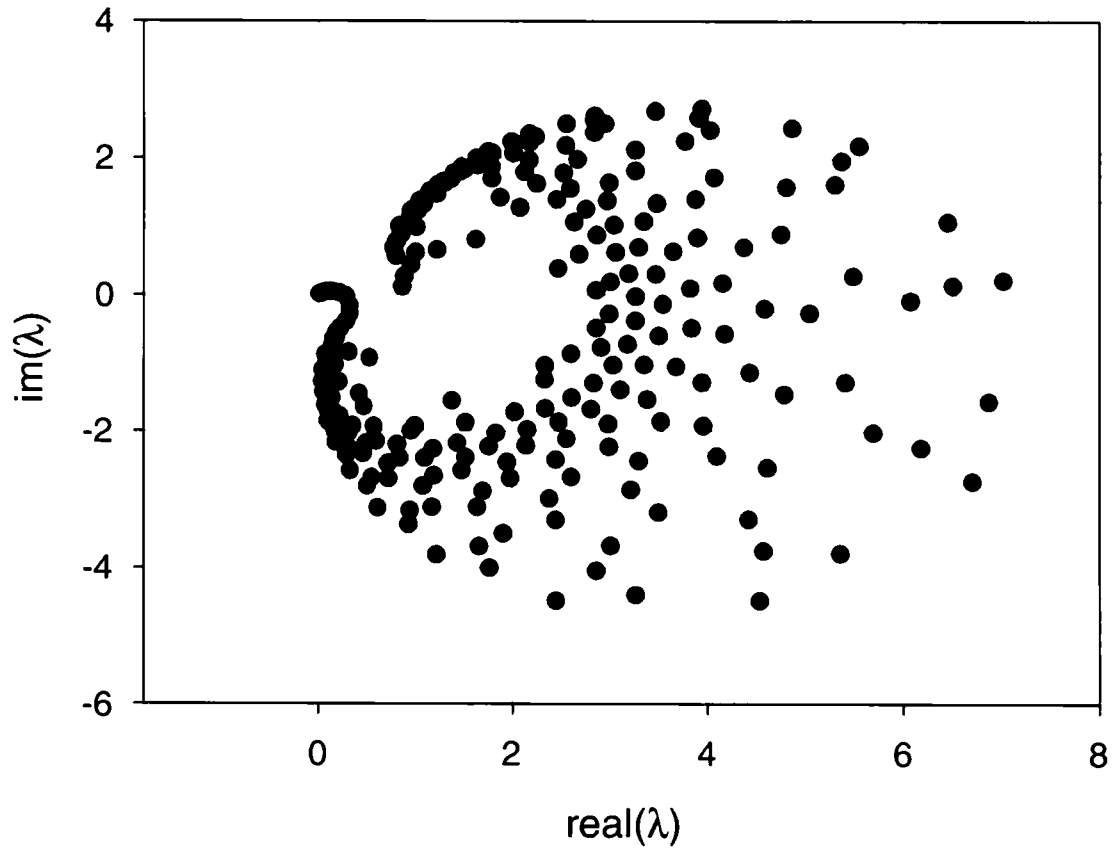


Fig. 6.11 OSP-ILUCを適用したときのスペクトル.  $\lambda = 55.034m$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 40m$ .

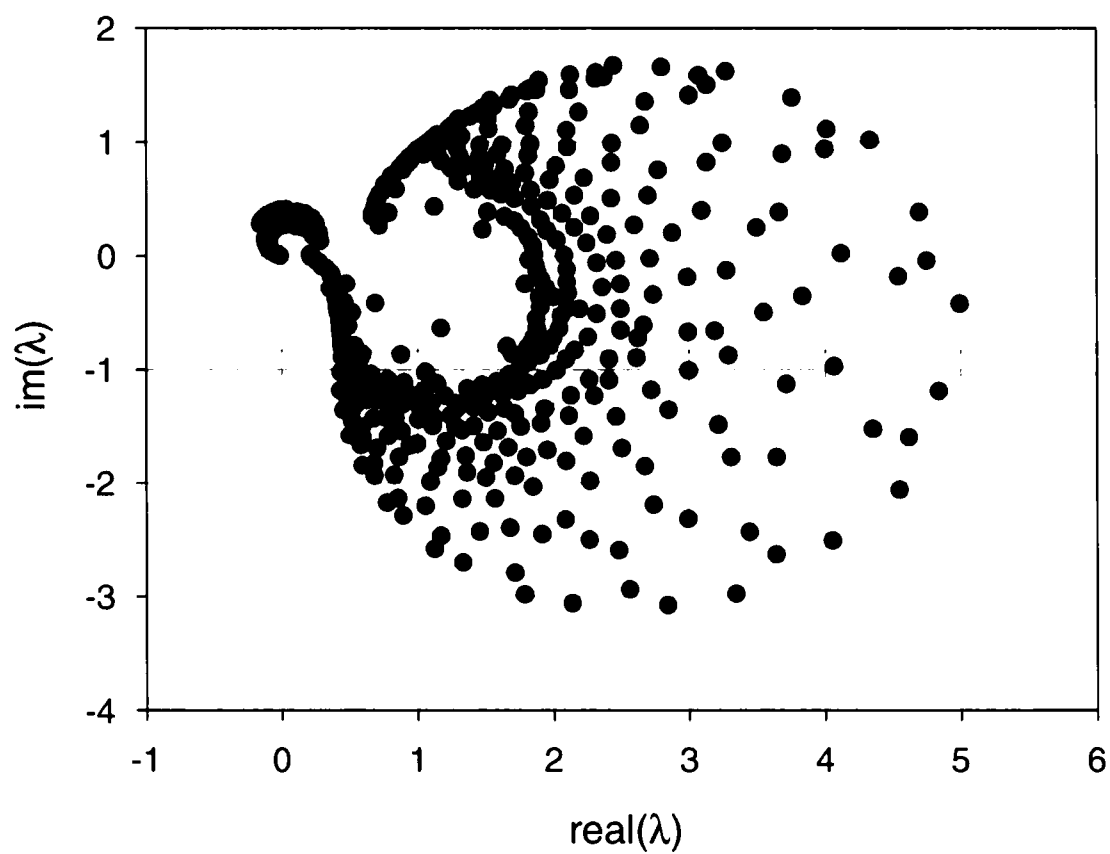


Fig. 6.12 OSP-ILUCを適用したときのスペクトル.  $\lambda = 55.034\text{m}$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 60\text{m}$ .

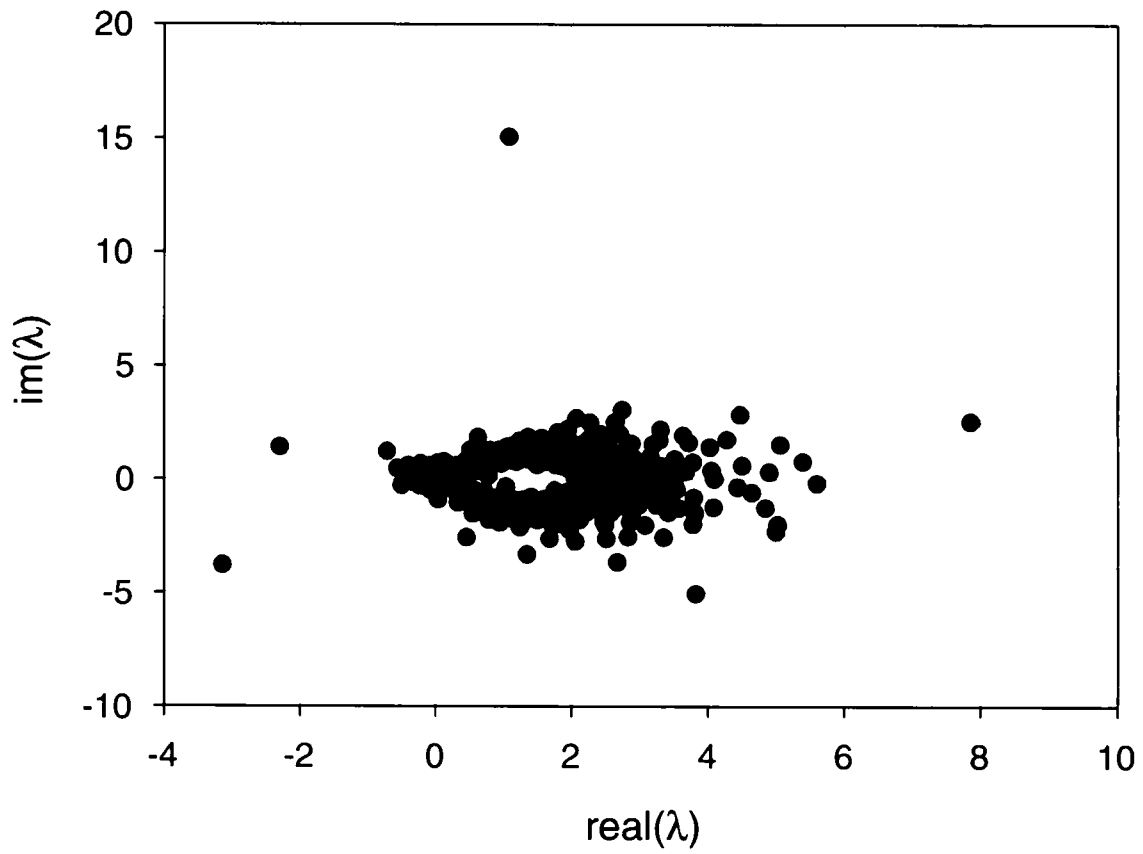


Fig. 6.13 OSP-ILUCを適用したときののスペクトル.  $\lambda = 55.034m$ ,  $N = 33441$ ,  $r = 80m$ .

## 第7章 結論

### 7.1 本研究の成果

本研究は、非Hermite密行列を係数とする大規模連立一次方程式に対する反復解法の高速化とその超大型浮体への応用に関するものである。

本研究の成果は次の通りである。

- 超大型浮体の波浪応答解析において、反復法としてGMRES-DR<sup>33)</sup>を適用することにより、リスタート版GMRESと比較して、計算時間を大幅に減少させることができた<sup>20, 21)</sup>。リスタート版GMRESでは、生成されたKrylov部分空間は、リスタートのときにすべて捨てられていた。そこで、GMRES-DRでは、生成されたKrylov部分空間を、いくつかの近似固有ベクトル群が張る部分空間に圧縮することにより、その高速化が実現された。また、近似固有ベクトル群をQR法を用いて計算することにより、数値的に安定に実行される。
- 超大型浮体の波浪応答解析において、前処理としてOSP<sup>6)</sup>-ILUC<sup>18)</sup>を適用することにより、前処理を適用しないときと比較して、計算時間を大幅に減少させることができた<sup>22, 23, 24, 25, 26)</sup>。FMMの適用により、遠方点に対応する行列成分は直接計算されない。また、近傍点に対応する行列成分は絶対値の大きな値をとることから、近傍点からなる疎行列から前処理行列を構成することが望ましい。さらに、OSP-ILUCの適用による係数行列のスペクトルの計算を実行し、本手法の有効性を検討した。

## 7.2 今後の研究課題

係数行列  $A$  が正規 ( $AA^H = A^H A$ ) のとき, GMRES<sup>41, 52, 53)</sup> の収束率に関する  $A$  のスペクトル (固有値分布) による評価式<sup>36)</sup> が知られている. これは, 正規行列のスペクトル分解<sup>38)</sup> から証明される. また, Hermite 行列は正規行列である. 係数行列が正規でないときスペクトル分解定理が成立するとは限らないことが, 非Hermite行列を係数とする連立一次方程式の研究を困難にしている.

遠方に人工境界を導入し, この境界上でDtN (Dirichlet-to-Neumann) 境界条件を課す, DtN有限要素法<sup>15)</sup> を用いれば, 扱う作用素は自己共役となる. 反復法としてCG<sup>11, 9)</sup> を用いることができ, その収束率は係数行列のスペクトルにより決定される<sup>9, 36)</sup>. また, 必要とする記憶容量も反復回数によらず一定である. Hermite行列に対する前処理として, 分解過程で発生するフィルインによる影響を要素の棄却ごとに対角要素への修正によって補償し分解のロバスト性と収束性の大きな向上を実現した分解法<sup>14)</sup> が有効であることが知られている. したがって, 今後は, 係数行列がHermiteとなるような離散化手法も検討する必要がある.

## 参考文献

- (1) Amini A, Harris J, Wilton DT. Coupled boundary and finite element methods for the solution of the dynamic fluid-structure interaction problem. New York: Springer-Verlag; 1992.
- (2) Anderson E, Bai Z, Bischof C, Demmel J, Dongarra J, Cruz JD, Greenbaum A, Hammarling S, McKenney A, Ostrouchov S, Sorensen D. LAPACK Users' Guide, 2nd ed. Philadelphia: SIAM; 1995. (小国力 訳. 行列計算パッケージLAPACK利用の手引. 丸善; 1995.)
- (3) Barrett R, Berry M, Chan TF, Demmel J, Donato J, Dongarra J, Eijkhout V, Pozo R, Romine C, Van der Vorst H. Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods. Philadelphia: SIAM; 1994. (長谷川里美 他 訳. 反復法 Templates. 朝倉書店; 1996.)
- (4) Benzi M, Tũma M. A sparse approximate inverse preconditioner for nonsymmetric linear systems. SIAM J Sci Comput 1998; 19: 968-994.
- (5) Bollhöfer M, Saad Y. On the relations between ILUs and factored approximate inverses. SIAM J Matrix Anal Appl 2002; 24: 219-237.
- (6) Chen K. An analysis of sparse approximate inverse preconditioners for boundary integral equations. SIAM J Matrix Anal Appl 2001; 22: 1058-1078.
- (7) Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics I,II. Interscience; 1962. (斎藤利弥 監訳. 数理物理学の方法(全4巻). 東京図書; 1989.)
- (8) 藤野清次, 張紹良. 反復法の数理. 朝倉書店; 1996.
- (9) Golub G, Van Loan C. Matrix Computations, second ed. Baltimore: The Johns Hopkins Univ Press; 1989.
- (10) Greengard L. The rapid evaluation of potential fields in particle systems. Massachusetts: MIT Press; 1988.



- (11) Hestenes MR, Stiefel E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. J Res Nat Bur Standards 1952; 49: 409-436.
- (12) IMSL Math/Library. Visual Numerics; 1997.
- (13) 伊理正夫. 線形代数I,II「岩波講座, 応用数学」. 岩波書店; 1993.
- (14) 柿原正伸, 藤野清次. 構造解析で現れる線形方程式に対する対角緩和つき準ロバーストICCG法の収束性評価. 日本計算工学会論文集 2004;
- (15) Keller J, Givoli D. Exact nonreflecting boundary conditions. J Comput Phys 1989; 82: 172-192.
- (16) Le Calvez C, Molina B. Implicitly restarted and deflated GMRES. Numer Algorithms 1999; 21: 261-285.
- (17) Lehoucq RB, Sorensen DC. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iterations. SIAM J Matrix Anal Appl 1996; 17: 789-821.
- (18) Li N, Saad Y, Chow E. Crout version of ILU for general sparse matrices. SIAM J Sci Comput 2003; 25: 716-728.
- (19) Liesen J. Computable convergence bounds for GMRES. SIAM J Matrix Anal Appl 2000; 21: 882-903.
- (20) 巻幡憲俊, 宇都宮智昭, 渡邊英一. 波浪回折問題のための境界要素法へのGMRES-IRの適用. 土木学会応用力学論文集 2003; 6: 275-281.
- (21) 巻幡憲俊, 宇都宮智昭, 渡邊英一. 超大型浮体の波浪応答解析へのGMRES-DRの適用. 土木学会構造工学論文集 2004; 50A: 179-185.
- (22) 巻幡憲俊, 宇都宮智昭, 渡邊英一. 波浪回折問題のための境界要素法へのILUCの適用. 土木学会応用力学論文集 2004; 7: 279-286.
- (23) 巻幡憲俊, 宇都宮智昭, 渡邊英一. 非エルミート密行列におけるILUC-GMRESの有効性に関する数値実験. 日本応用数理学会年会 2004.

- (24) Makihata N, Utsunomiya T, Watanabe E. Effectiveness of OSP-ILUC for wave diffraction analysis of a Very Large Floating Structure (VLFS). Proceedings of the 17<sup>th</sup> KKCNN Symposium on Civil Engineering 2004.
- (25) 巻幡憲俊, 宇都宮智昭, 渡邊英一. 超大型浮体の波浪回折問題に対するOSP-ILUCの有効性. 土木学会構造工学論文集 2005; 51A: submitted.
- (26) Makihata N, Utsunomiya T, Watanabe E. Effectiveness of GMRES-DR and OSP-ILUC for wave diffraction analysis of a Very Large Floating Structure (VLFS). Engng Anal Bound Elem: submitted.
- (27) 巻幡憲俊, 宇都宮智昭, 渡邊英一. OSP-ILUCの非エルミート密行列への適用性に関する固有値分布からの検討. 第8回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム: in preparation.
- (28) Magolu monga Made M. Incomplete factorization-based preconditionings for solving the Helmholtz equation. Int J Numer Methods Engrg 2001; 50: 1077-1101.
- (29) Meijerink J, Van der Vorst H. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric *M*-matrix. Math Comp 1977; 31: 148-162.
- (30) Meijerink J, Van der Vorst H. Guidelines for the usege of incomplete decompositions in solving sets of linear equations as they occur in practical problems. J Comput Phys 1981; 44: 134-155.
- (31) Morgan RB. A restarted GMRES method augmented with eigenvectors. SIAM J Matrix Anal Appl 1995; 16: 1154-1171.
- (32) Morgan RB. Implicitly restarted GMRES and Arnoldi methods for nonsymmetric systems of equations. SIAM J Matrix Anal Appl 2000; 21: 1112-1135.
- (33) Morgan RB. GMRES with deflated restarting. SIAM J Sci Comput 2002; 24: 20-37.
- (34) Morgan RB, Zeng M. Harmonic projection methods for large non-symmetric eigenvalue problems. Numer Linear Algebra Appl 1998; 5: 33-55.
- (35) 森 正武, 杉原正顕, 室田一雄. 線形計算「岩波講座, 応用数学」. 岩波書店; 1994.

- (36) Nachtigal NM, Reddy SC, Trefethen LN. How fast are nonsymmetric matrix iterations? SIAM J Matrix Anal Appl 1992; 13: 778-795.
- (37) 西村直志, 宗像秀紀. 多重極境界積分方程式法の簡易並列化について. 京都大学学術情報メディアセンター広報 2004; 3: 30-34.
- (38) Rudin W. Functional analysis, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company; 1991.
- (39) Saad Y. Numerical methods for large eigenvalue problem. New York: Halsted Press; 1992.
- (40) Saad Y. ILUT: a dual threshold incomplete LU factorization. Numer Linear Algebra Appl 1994; 1: 387-402.
- (41) Saad Y, Schultz MH. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems. SIAM J Sci Stat Comput 1986; 7: 856-869.
- (42) Schneider S, Marburg S. Performance of iterative solvers for acoustic problems. Part II. Acceleration by ILU-type preconditioner. Engrg Anal Bound Elem 2003; 27: 751-757.
- (43) Sonneveld P. CGS: a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. SIAM J Sci Statist Comp 1989; 10: 36-52.
- (44) Sorensen DC. Implicit application of polynomial filters in a k-step Arnoldi method. SIAM J Matrix Anal Appl 1992; 13: 357-385.
- (45) 田端正久. 微分方程式の数値解法II「岩波講座, 応用数学」. 岩波書店; 1994.
- (46) 巽友正. 連続体の力学「岩波基礎物理シリーズ 2」. 岩波書店; 1995.
- (47) Teng B, Eatock Taylor R. New higher-order boundary element methods for wave diffraction/radiation. Applied Ocean Research 1995; 17: 71-77.
- (48) 宇都宮智昭, 渡邊英一. 超大型浮体の波浪応答解析のための高速化グリーン関数法の開発. 海洋工学シンポジウム 2001; 16: 313-320.
- (49) Utsunomiya T, Watanabe E. Wave response analysis of hybrid-type VLFS by accelerated BEM. Proc 3rd Int Conf Hydroelasticity in Marine Technology 2003; 297-303.

- (50) Utsunomiya T, Watanabe E, Nishimura N. Fast multipole algorithm for wave diffraction/radiation problems and its application to VLFS in variable water depth and topography. Proc 20th Int Conf on Offshore Mech & Arctic Eng 2001; OMAE01-5202.
- (51) Van der Vorst H. Iterative solution methods for certain sparse linear systems with a non-symmetric matrix arising from PDE-problems. J Comput Phys 1981; 44: 1-19.
- (52) Walker HF. Implementation of the GMRES method using Householder transformations. SIAM J Sci Stat Comput 1988; 9: 152-163.
- (53) Walker HF, Zhou L. A simpler GMRES. Numer Linear Algebra Appl 1994; 1: 571-581.
- (54) 渡邊英一, 宇都宮智昭, 川辺俊輔. 非正則周波数の除去された波浪回折・発散問題のための高次境界要素法. 計算工学講演会論文集 2002; 7: 385-388.
- (55) Zhang SL. GPBi-CG: generalized product-type methods based on Bi-CG for solving non-symmetric linear systems. SIAM J Sci Stat Comput 1997; 18: 537- 551.
- (56) Zlatev Z. Computational Methods for General Sparse Matrices. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer; 1991.

## 謝辞

最後に本論文をとりまとめにあたり、京都大学渡邊英一教授、宇都宮智昭助教授、永田和寿助手に懇切なご指導を賜りました。また多くの先輩、同輩、後輩から暖かい励ましをいただいてまいりました。

末筆ではありますが各位に改めて感謝の意を表し、むすびといたします。